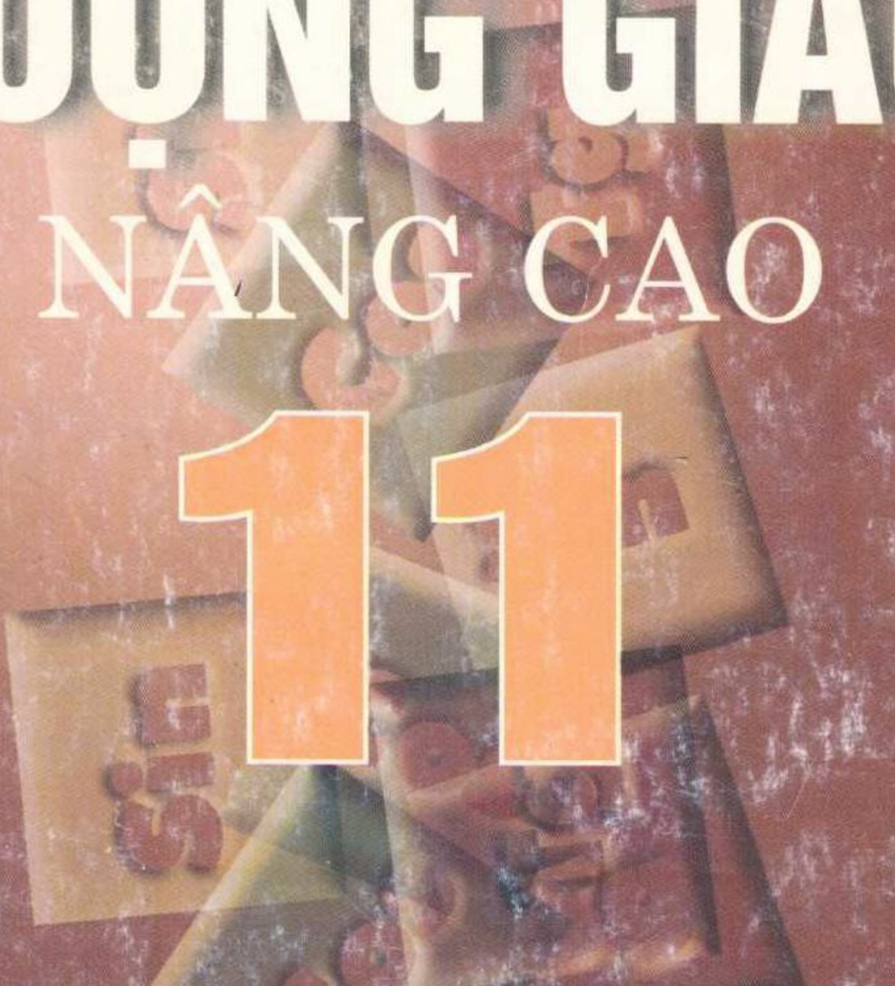
GIẢI TOÁN
LƯỢNG GIÁC
NÂNG CAO
11



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỮU TRÍ – LÊ HỒNG ĐỨC

GIẢI TOÁN LƯỢNG GIÁC
NÂNG CAO
11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Với mục đích cung cấp cho các Thầy giáo, Cô giáo một bộ bài giảng về Lượng giác có chất lượng và cho các em PTTH một cuốn tài liệu học tập, tra cứu Lượng giác thông dụng và có hiệu quả phù hợp với chương trình Toán nâng cao (ban KHTN) của BGD và ĐT, nhóm Cự Môn chúng tôi xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách:

GIẢI TOÁN LƯỢNG GIÁC NÂNG CAO 11

Cuốn sách gồm 2 chương với 15 chủ đề, miêu tả chi tiết 40 dạng toán cơ bản liên quan tới phương trình và hệ phương trình lượng giác.

Ở mỗi chủ đề:

1. *Với việc trình bày dưới dạng các bài toán cơ bản, cũng ví dụ minh hoạ ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thầy, Cô giáo và với các em học sinh sẽ hiểu và biết cách trình bày bài.*
2. *Đặc biệt là nội dung của các chú ý sau một vài ví dụ sẽ giúp các Thầy, Cô giáo củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi " Tại sao lại nghĩ và làm như vậy ? ".*
3. *Ngoài ra có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở lên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Với phong cách trình bày như vậy, cuốn sách còn nhằm giúp cho các em học sinh rèn luyện năng lực vận dụng lý thuyết được học.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng bằng việc tham khảo một lượng rất lớn các tài liệu hiện nay để vừa viết, vừa mang đi giảng dạy ngay cho các học sinh của mình từ đó kiểm nghiệm và bổ sung thiếu sót, cùng với việc tiếp thu có chọn lọc ý kiến của các bạn đồng nghiệp để dần hoàn thiện bộ tài liệu này, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Th.s Toán học Lê Hồng Đức phụ trách
Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0983046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà nội, ngày 10 tháng 10 năm 2006

LÊ HỮU TRÍ – LÊ HỒNG ĐỨC

CHƯƠNG I

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình:

$\sin x = m$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2: Nếu $|m| \le 1$, xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua sin của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua sin của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \sin\alpha$, ta được:

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in Z.$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z.$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z.$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x = \dfrac{1}{3}$. b. $\sin(2x - \dfrac{\pi}{4}) + \sin(3x + \dfrac{\pi}{3}) = 0.$

Giải

a. Đặt $\dfrac{1}{3} = \sin\alpha$, khi đó:

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có:

$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\sin(3x+\frac{\pi}{3})=0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{4}) = -\sin(3x+\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(-3x-\frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=-3x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi-(-3x-\frac{\pi}{3})+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5} \\ x=-\frac{19\pi}{12}-2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trỉnh $\sin(\pi\sin 2x) = 1$.

Giải

Ta có:

$$\sin(\pi\sin 2x)=1 \Leftrightarrow \pi\sin 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}+2k, k\in Z. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|\frac{1}{2}+2k|\le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le k\le \frac{1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{6}+2l\pi \\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+l\pi \\ x=\frac{5\pi}{12}+l\pi \end{array}\right., l\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình:

$\cos x = m$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2: Nếu $|m| \le 1$, xét hai trường hợp:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cos của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cos của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \cos\alpha$, ta được:

$$\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in Z$.
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in Z$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x = \cos 2x$.

b. $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$.

Giải

a. Ta có:

$$\sin 3x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \\ 3x = \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có:

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$\cos[\frac{\pi}{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + 4k & (1) \\ \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} + 4k & (2) \end{array}\right., k \in Z.$$

- Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2}+4k\right| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le k \le \frac{1}{8} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2l\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{12}+2l\pi \\ x=-\frac{\pi}{12}+2l\pi \end{array}\right., l\in Z. \quad (3)$$

- Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|-\frac{1}{2}+4k\right| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \le k \le \frac{3}{8} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+2l\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{3}+2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{11\pi}{12}+2l\pi \\ x=-\frac{5\pi}{12}+2l\pi \end{array}\right., l\in Z. \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4), ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{11\pi}{12}+l\pi \\ x=\frac{7\pi}{12}+l\pi \end{array}\right., l\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Bài toán 3: Giải và biện luận phương trình:

$$\mathrm{tg}x = m.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện:

$$\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z.$$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua tg của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng:

$$\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in Z.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua tg của góc đặc biệt, khi đó đặt $m=\mathrm{tg}\alpha$, ta được:

$$\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in Z.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$\text{tg}\left[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)\right] = 1.$$

Giải

Điều kiện:

$$\cos\left[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)\right] \neq 0. \qquad (*)$$

Phương trình tương đương với:

$$\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 1 + 4k,\ k\in Z. \qquad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|1 + 4k| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}+1}{4} \leq k \leq \frac{\sqrt{2}-1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2l\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{array}\right.,\ l\in Z \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Bài toán 4: Giải và biện luận phương trình:
cotgx = m.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện:

$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi,\ k\in Z.$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cotg của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\text{cotg}x = \text{cotg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k\in Z.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cotg của góc đặc biệt, khi đó đặt m = cotgα, ta được:

$$\text{cotg}x = \text{cotg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k\in Z.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau:

a. $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.   b. $\cos x = \sqrt{3}\sin x$.

Giải

a. Điều kiện:

$$\sin(\frac{\pi}{4} - x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} - k\pi,\ k \in Z. \qquad (*)$$

Ta có:

$$\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - x) = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} - k\pi,\ k \in Z$ thoả mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Ta có:

$$\cos x = \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow \operatorname{cotg} x = \sqrt{3} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài toán 5: Biện luận theo m số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình lượng giác cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử với phương trình:

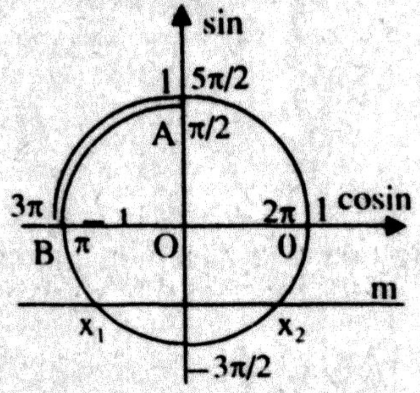
$$\sin x = m.$$

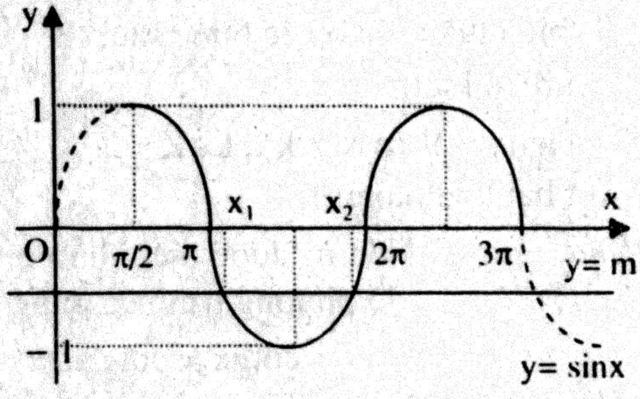
Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biểu diễn (α, β) trên đường tròn đơn vị thành cung $\overset{\frown}{AB}$.

Bước 2: Tịnh tiến đường thẳng m song song với trục cosin, khi đó số giao điểm của nó với cung $\overset{\frown}{AB}$ bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.





Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$, lấy trên (α, β).

Bước 2: Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ song song với trục Ox, khi đó số giao điểm của nó với phần đồ thị hàm số $y = \sin x$ bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.

Chú ý: Phương pháp trên được mở rộng tự nhiên cho:

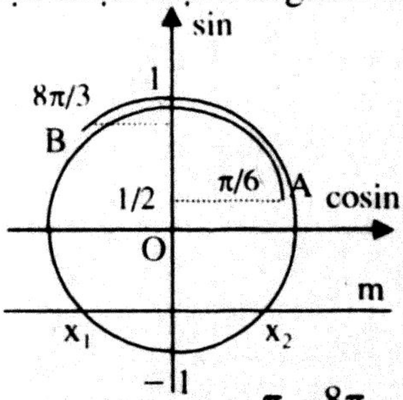
1. Phương trình cosx = m, với lưu ý khi sử dụng cách 1 ta tịnh tiến đường thẳng m song song với trục sin.
2. Với các phương trình tgx = m và cotgx = m ta chỉ có thể sử dụng cách 2.

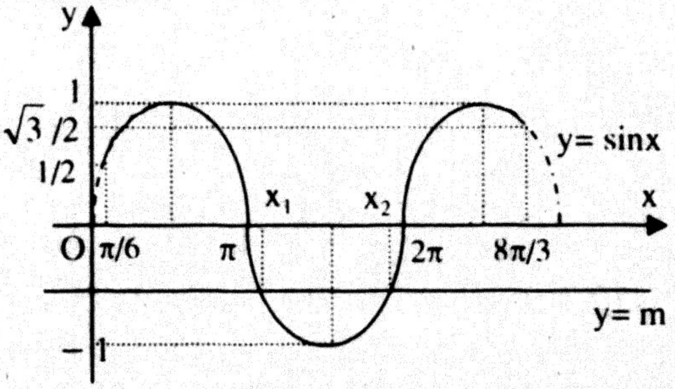
Ví dụ 7: Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(\frac{\pi}{6}, \frac{8\pi}{3})$ của phương trình

$$\sin x = m.$$

Giải

Ta lựa chọn một trong hai cách biểu diễn





Kết luận: đặt $D = (\frac{\pi}{6}, \frac{8\pi}{3})$, ta có:

- Với $|m| > 1$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = -1$, phương trình có 1 nghiệm thuộc D.
- Với $-1 < m < \frac{1}{2}$ hoặc $m = 1$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $\frac{1}{2} \le m < \frac{\sqrt{3}}{2}$, phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $\frac{\sqrt{3}}{2} \le m < 1$, phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc D.

Ví dụ 8: Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(-\frac{5\pi}{4}, \pi)$ của phương trình

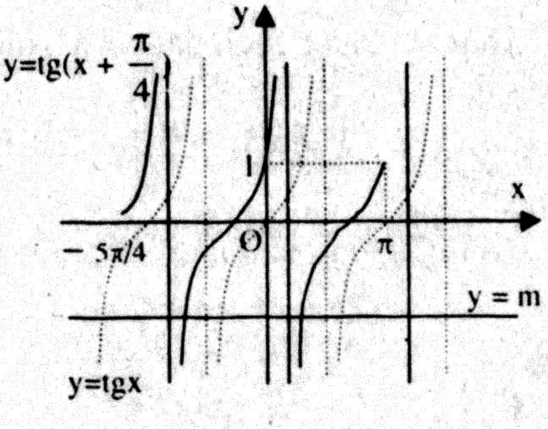
$$(m + 1)\sin x = (m - 1)\cos x. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x + \cos x = m(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = m\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = m.$$



Ta có kết luận:

- Với $m \ge 1$ hoặc $m \le 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thuộc D.
- Với $0 < m < 1$, phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc D.

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (ĐHSP II – 2000): Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$\cos[\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})] = 1.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}) = 2k\pi \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 16k \ge 0 \\ 9x^2 + 160x + 800 = (3x - 16k)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{16k}{3}, \ k \in Z \\ (3k+5)x = 8k^2 - 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8k^2 - 25}{3k+5} \ge \dfrac{16k}{3}, \ k \in Z \\ x = \dfrac{8k^2 - 25}{3k+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -\dfrac{5}{3}, \ k \in Z & (1) \\ 9x = 24k - 40 - \dfrac{25}{3k+5} & (2) \end{cases}$$

Muốn x nguyên thì trước hết từ (2) ta phải có:

$$\frac{25}{3k+5} \in Z \Leftrightarrow 3k+5 \text{ là ước của } 25 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 3k+5 = -1 \\ 3k+5 = -5 \\ 3k+5 = -25 \end{array}\right. \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} k = -2 \\ k = -10 \end{array}\right..$$

- Với $k = -2$, ta được $x = -7$.
- Với $k = -10$, ta được $x = -31$.

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $x = -7$ và $x = -31$.

Bài 2: (ĐH Tổng Hợp Lômônốp – 1982): Giải phương trình:

$$\sqrt{-x^8 + 3x^4 - 2}.\sin[\pi(16x^2 + 2x] = 0$$

BÀI GIẢI

Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{ll} -x^8 + 3x^4 - 2 = 0 & (1) \\ \begin{cases} -x^8 + 3x^4 - 2 > 0 \\ \sin[\pi(16x^2 + 2x)] = 0 \end{cases} & \begin{array}{l}(2) \\ (3)\end{array} \end{array}\right.$$

- Giải (1) bằng cách đặt $t = x^4$, điều kiện $t \ge 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4 = 1 \\ x^4 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt[4]{2} \end{array}\right.$$

- Giải (2), dựa vào lời giải của (1) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 1 < t < 2 \Leftrightarrow 1 < x^4 < 2 \Leftrightarrow 1 < |x| < \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt[4]{2} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt[4]{2} \end{array}\right..$$

- Giải (3), ta có:

$$(3) \Leftrightarrow \pi(16x^2 + 2x) = k\pi \Leftrightarrow 16x^2 + 2x - k = 0 \qquad (4)$$

Phương trình (4) có nghiệm khi:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 16k \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -\frac{1}{16} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k \geq 0$$

khi đó (4) có nghệm $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+16k}}{16}$.

- Để nghiệm $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1+16k}}{16}$ (≥ 0) thoả mãn (2) điều kiện là:

$$1 < \frac{-1 + \sqrt{1+16k}}{16} < \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow 17 < \sqrt{1+16k} < 1 + 16\sqrt[4]{2}$$

$$\Leftrightarrow 18 < k < 16\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = \{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}.$$

- Để nghiệm $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1+16k}}{16}$ (<0) thoả mãn (2) điều kiện là:

$$-\sqrt[4]{2} < \frac{-1 - \sqrt{1+16k}}{16} < -1 \Leftrightarrow 15 < \sqrt{1+16k} < 16\sqrt[4]{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow 14 < k < 16\sqrt{2} - 2\sqrt[4]{2} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm:

$$x = \{\pm 1, \pm\sqrt[4]{2}\} \cup \left\{x = \frac{-1 + \sqrt{1+16k}}{16} \mid k = \overline{19,25}\right\} \cup \left\{x = \frac{-1 - \sqrt{1+16k}}{16} \mid k = \overline{15,20}\right\}$$

Bài 3: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{a^2}{1 - \mathrm{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 - \mathrm{tg}^2 x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 - \mathrm{tg}^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \mathrm{tg} x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{a^2}{1 - \mathrm{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos^2 x - \sin^2 x} \Leftrightarrow \frac{a^2}{1 - \mathrm{tg}^2 x} = \frac{\mathrm{tg}^2 x + (a^2 - 2)(1 + \mathrm{tg}^2 x)}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 1)\mathrm{tg}^2 x = 2. \qquad (1)$$

- Với $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$, khi đó (1) vô nghiệm.

- Với $a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$, khi đó (1) có dạng:

$$tg^2x = \frac{2}{a^2-1}. \qquad (2)$$

Để (2) có nghiệm và thoả mãn điều kiện ta cần có:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a^2-1} \geq 0 \\ \dfrac{2}{a^2-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1 \\ a \neq \pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow tgx = \pm tg\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k\pi, k \in Z.$$

Kết luận:

- Với $|a| \leq 1$ hoặc $a = \pm\sqrt{3}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \backslash \{\pm\sqrt{3}\}$, phương trình có hai họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin(\pi\cos 2x) = 1$.

b. $\cos(\pi\cos 3x) = 1$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\cos(\pi\sin x) = 1$.

b. $\sin\frac{\pi}{x} = \cos(\pi x)$.

c. $\cos[\frac{\pi}{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2}$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $tg[\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)] = 1$.

b. $cotg[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)] = 1$.

Bài tập 4: Giải và biện luận các phương trình sau:

a. $\cos(x+\alpha) + \cos(x-\alpha) = 2\cos\alpha$.

b. $\sin(x+\alpha) + \cos(x-\alpha) = 1 + \sin\alpha$.

c. $(m+1)\sin 2x + 1 - m^2 = 0$.

d. $(m+2)tg2x - \sqrt{m} = 0$.

Bài tập 5: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

a. $\sin x = m$, với $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}]$.

b. $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = m$, với $x \in [-\frac{\pi}{24}, \frac{19\pi}{8}]$.

c. $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = m$, với $x \in [\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}]$.

d. $cotg(x - \frac{\pi}{4}) = m$, với $x \in (-\frac{5\pi}{4}, \pi)$.

CHỦ ĐỀ 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC BẬC HAI

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình :

$$a.\sin^2x + b.\sin x + c = 0. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $\sin x = t$, điều kiện $|t| \le 1$, khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = a.t^2 + b.t + c = 0. \qquad (2)$$

Bước 2: Xét tuỳ theo yêu cầu của bài toán:

1. Nếu bài toán yêu cầu giải phương trình thì ta giải phương trình (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t| \le 1$.
2. Nếu bài toán yêu cầu giải và biện luận phương trình theo tham số thì ta giải và biện luận phương trình (2) theo t, điều kiện $|t| \le 1$, cụ thể:

- Ta tính các biểu thức Δ, $af(1)$, $af(-1)$, $\frac{S}{2} - 1$, $\frac{S}{2} + 1$
- Lập bảng tổng kết:

m	Δ'	$af(-1)$	$af(1)$	$\frac{S}{2}-1$	$\frac{S}{2}+1$	So sánh các nghiệm với ± 1
$-\infty$ $+\infty$						

3. Nếu bài toán yêu cầu tìm giá trị của tham số để phương trình có nghiệm

Trường hợp 1: $a = 0$, thử vào phương trình $\Rightarrow$ kết luận.

Trường hợp 2: $a \ne 0$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thoả mãn $|t| \le 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{(2) có 1 nghiệm thuộc } [-1, 1]\\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc } [-1, 1]\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(1) \le 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(-1) \ge 0 \\ af(1) \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{S}{2} \le 1 \end{cases}\end{array}\right.$$

4. Nếu bài toán yêu cầu tìm giá trị của tham số để phương trình có k nghiệm thuộc (α, β)

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$, thử vào phương trình ⇒ kết luận

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$

Vì $x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow t \in (\alpha_t, \beta_t)$. (*)

Từ đó dựa vào tính chất nghiệm của phương trình $\sin x = \sin\gamma$ và đường tròn đơn vị biểu diễn khoảng (α, β), ta có được điều kiện cần và đủ cho phương trình (2).

Chú ý:

1. Với các yêu cầu 3, 4 ta ưu tiên việc lựa chọn phương pháp hàm số để giải phương trình.
2. Phương pháp trên cũng được sử dụng để giải và biện luận phương trình:
$$a.\cos^2x + b.\cos x + c = 0.$$
3. Thông thường phương trình ban đầu chưa phải phương trình bậc hai theo 1 hàm số lượng giác, khi đó ta cần thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác dựa trên nguyên tắc:
   - Nếu phương trình chứa nhiều hàm lượng giác khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa một hàm.
   - Nếu phương trình chứa các hàm lượng giác của nhiều cung khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa các hàm lượng giác của một cung.

Ví dụ 1: (CĐSP Hà Nội – 1997): Giải phương trình:
$$\cos 2x + \sin^2x + 2\cos x + 1 = 0.$$

Giải

Biến đổi tương đương phương trình về dạng:
$$2\cos^2x - 1 + 1 - \cos^2x + 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2x + 2\cos x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x = \pi + 2k\pi, k \in Z$.

Ví dụ 2: Cho phương trình:
$$4\sin^2 2x + 8\cos^2x - 5 + 3m = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{4}{3}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:
$$4(1 - \cos^2 2x) + 4(1 + \cos 2x) - 5 + 3m = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 - 3m = 0.$$

Đặt $t = \cos 2x$, điều kiện $|t| \leq 1$.

Khi đó, phương trình có dạng:
$$4t^2 - 4t - 3 - 3m = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 3 = 3m. \quad (2)$$

a. Với $m = -\frac{4}{3}$, phương trình có dạng:

$$4t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy với $m = -\frac{4}{3}$, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thuộc [− 1, 1]

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2)\text{ có 1 nghiệm thuộc }[-1,1]\\(2)\text{ có 2 nghiệm thuộc }[-1,1]\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(-1).f(1) \le 0\\ \left\{\begin{array}{l}\Delta' \ge 0\\ af(-1) \ge 0\\ af(1) \ge 0\\ -1 \le \frac{S}{2} \le 1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(5-3m)(-3-3m) \le 0\\ \left\{\begin{array}{l}16+12m \ge 0\\ 5-3m \ge 0\\ -3-3m \ge 0\\ -1 \le \frac{1}{2} \le 1\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1 \le m \le 5/3\\ \left\{\begin{array}{l}m \ge -4/3\\ m \le 5/3\\ m \le -1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le m \le \frac{5}{3} \overset{m\in Z^+}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}m = -1\\ m = 0\\ m = 1\end{array}\right..$$

Vậy với $m = \pm 1$ hoặc $m = 0$ phương trình có nghiệm.

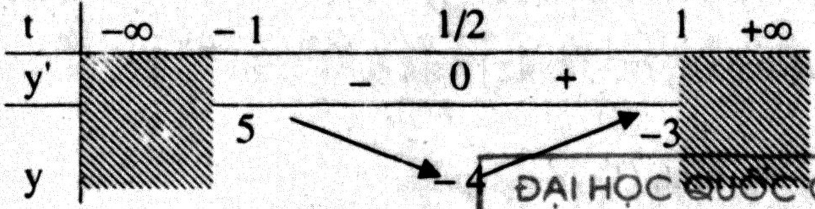
Cách 2: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng $y = 3m$ cắt đồ thị hàm số $y = 4t^2 - 4t - 3$ trên đoạn [− 1, 1].

Xét hàm số $y = 4t^2 - 4t - 3$ trên đoạn [− 1, 1].

Đạo hàm

$$y' = 8t - 4,\ y' = 0 \Leftrightarrow 8t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên



ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1682

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$-4 \le 3m \le 5 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le m \le \frac{5}{3} \overset{m\in Z^{+}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \\ m=1 \end{array}\right. .$$

Vậy với m = ±1 hoặc m = 0 phương trình có nghiệm.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$\sin^2 3x + (m^2-3)\sin 3x + m^2 - 4 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

Giải

Đặt $t = \sin 3x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 + (m^2-3)t + m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=4-m^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = -1 \\ \sin 3x = 4-m^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ \sin 3x = 4-m^2 \quad (2) \end{array}\right. , k\in Z.$$

a. Với m = 1, phương trình (2) có dạng:

$\sin 3x = 3$ vô nghiệm

Vậy với m = 1 phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$.

b. Trước hết nghiệm

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \text{ là } x_1 = \frac{7\pi}{6}.$$

Vậy để phương trình (1) có đúng 4 nghiệm thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ điều kiện là phương trình (2) có đúng 3 nghiệm khác $\frac{7\pi}{6}$ thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

Vì $x\in[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \Leftrightarrow 3x\in[2\pi, 4\pi]$,

do đó điều kiện là:

$$\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

khi đó ta được các nghiệm $3x\in[2\pi, 3\pi, 4\pi] \Leftrightarrow x\in[\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}]$

Vậy với m = ±2 phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.

Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình :

$$a.tg^2x + b.tgx + c = 0 \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z$.

Bước 2: Đặt tgx = t, khi đó phương trình có dạng:

$$a.t^2 + b.t + c = 0. \qquad (2)$$

Bước 3: Giải và biện luận phương trình (2) theo t.

Chú ý:

1. Phương pháp trên được sử dụng để giải và biện luận phương trình:

$$a.cotg^2x + b.cotgx + c = 0$$

với điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k\in Z$.

2. Ưu tiên lựa chọn phương pháp hàm số để giải.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\,cotg^2x - 4cotgx + \sqrt{3} = 0.$$

Giải

Điều kiện:

$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k\in Z$.

Đặt cotgx = t, khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}\,t^2 - 4t + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = \sqrt{3} \\ \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x = \pi + 2k\pi, k\in Z$.

Ví dụ 5: Cho phương trình:

$$\frac{m^2 - 1}{\cos^2 x} - 2mtgx - m^2 + 2 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 2.

b. Tìm m để phương trình có đúng ba nghiệm thuộc $(-\pi, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện:

$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(m^2-1)(1+tg^2x)-2mtgx-m^2+2=0 \Leftrightarrow (m^2-1)tg^2x-2mtgx+1=0.$$

Đặt tgx = t, khi đó phương trình có dạng:

$$(m^2-1)t^2-2mt+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(m-1)t=1\\(m+1)t=1\end{array}\right. . \qquad (2)$$

a. Với m = 2, ta được:

$$\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=1=tg\dfrac{\pi}{4}\\tgx=\dfrac{1}{3}=tg\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\x=\alpha+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy với m = 2, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng ba nghiệm thuộc $(-\pi, \frac{\pi}{2})$

$$\Leftrightarrow \text{(2) có hai nghiệm trái dấu} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq\pm1\\\dfrac{1}{m-1}.\dfrac{1}{m+1}<0\end{cases} \Leftrightarrow m^2-1<0 \Leftrightarrow |m|<1.$$

Vậy với |m| < 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

II. CÁC BÀI TOÁN THI

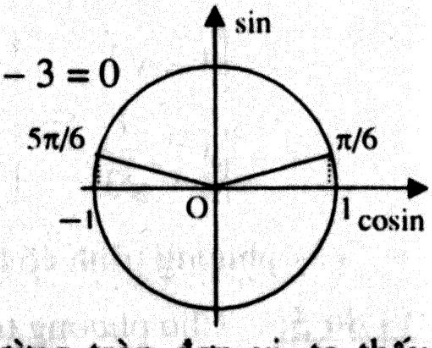
Bài 1: (ĐHCSND – 99): Tìm các nghiệm thoả mãn điều kiện cosx ≥ 0 của phương trình: $1-5\sin x+2\cos^2x=0$.

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1-5\sin x+2(1-\sin^2x)=0 \Leftrightarrow 2\sin^2x+5\sin x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=3 \text{ (loại)}\\\sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right. .$$



Bằng cách biểu diễn các họ nghiệm trên lên đường tròn đơn vị, ta thấy nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, k∈Z thoả mãn điều kiện cosx≥0.

Chú ý: Các em học sinh cũng có thể kiểm tra bằng phương pháp đại số như sau:

- Với $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow \cos x=\cos(\frac{\pi}{6}+2k\pi)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$, thoả mãn.
- Với $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow \cos x=\cos(\frac{5\pi}{6}+2k\pi)=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$, loại.

Vậy họ nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện cosx≥0 là $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

Bài 2: (ĐH Đà Nẵng – 96): Cho phương trình:

$$\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{3}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

BÀI GIẢI

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - (2m+1)t + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \\ \cos x = m \ \ (*) \end{array}\right., k \in Z.$$

a. Với $m = \frac{3}{2}$, phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy với $m = \frac{3}{2}$ phương trình có hai họ nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$.

b. Với $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow -1 \le \cos x \le 0$.

Do đó, phương trình (1) có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Leftrightarrow -1 \le m < 0$.

Bài 3: (CĐCN IV TPHCM – 2000): Cho phương trình:

$$\cos^2 x + 2(1-m)\cos x + 2m - 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{1}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm thuộc $[0, 2\pi]$.

BÀI GIẢI

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - 2(m-1)t + 2m - 1 = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = \frac{1}{2}$, phương trình có dạng:

$$t^2 + t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[0,\ 2\pi]$ $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm thoả mãn $-1 < t_1 < t_2 \le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(1) \ge 0 \\ -1 < \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 2 > 0 \\ 4m - 2 > 0 \\ 2 \ge 0 \\ -1 < m - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 2 - \sqrt{2}.$$

Vậy với $\frac{1}{2} < m < 2 - \sqrt{2}$ phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[0,\ 2\pi]$.

Cách 2: Biến đổi (2) về dạng:

$$t^2 + 2t - 1 = 2m(t - 1) \overset{t=1 \text{ không là nghiệm}}{\Leftrightarrow} \frac{t^2 + 2t - 1}{t - 1} = 2m.$$

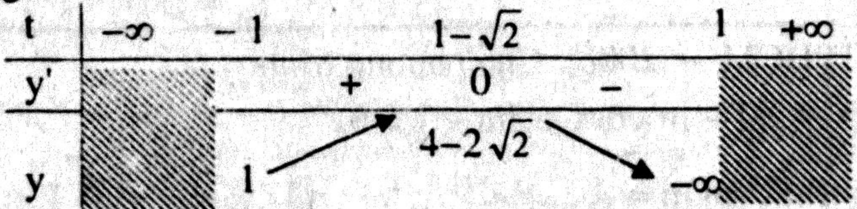
Phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[0,\ 2\pi]$ $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{t - 1}$ trên $(-1,\ 1)$ tại 2 điểm phân biệt.

Xét hàm số $y = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{t - 1}$ trên $(-1,\ 1)$

Đạo hàm

$$y' = \frac{t^2 - 2t - 1}{(t - 1)^2},\ y' = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$1 < 2m < 4 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 2 - \sqrt{2}.$$

Vậy với $\frac{1}{2} < m < 2 - \sqrt{2}$ phương trình (1) có 4 nghiệm thuộc $[0,\ 2\pi]$.

Bài 4: (HVKTQS – 2001): Giải phương trình:

$$3\text{cotg}^2x + 2\sqrt{2}\sin^2x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(3\text{cotg}^2x - 3\sqrt{2}\cos x) + (2\sqrt{2}\sin^2x - 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \sqrt{2}\right)\cos x + 2(\sqrt{2}\sin^2x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos x - \sqrt{2}\sin^2x)\cos x + \ + 2(\sqrt{2}\sin^2x - \cos x)\sin^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x)(3\cos x - 2\sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad k \in Z$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

Bài 5: (Đề 95): Giải và biện luận phương trình:

$$(m - 1)\sin^2 x - 2(m + 1)\cos x + 2m - 1 = 0. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(m - 1)(1 - \cos^2 x) - 2(m + 1)\cos x + 2m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)\cos^2 x + 2(m + 1)\cos x - 3m + 2 = 0.$$

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(m - 1)t^2 + 2(m + 1)t - 3m + 2 = 0. \qquad (2)$$

Ta đi xác định các giá trị:

$$\Delta' = (m + 1)^2 + (3m - 2)(m - 1) = 4m^2 - 3m + 3,$$

$$af(-1) = (m - 1)(-4m - 1),\ af(1) = 3(m - 1),$$

$$\frac{S}{2} - 1 = -\frac{m+1}{m-1} - 1 = -\frac{2m}{m-1},\ \frac{S}{2} + 1 = -\frac{m+1}{m-1} + 1 = -\frac{2}{m-1}.$$

Ta có bảng tổng kết sau:

m	Δ'	$af(-1)$	$af(1)$	$\frac{S}{2}-1$	$\frac{S}{2}+1$	So sánh các nghiệm với ± 1
$-\infty$						$t_1 < -1 < 1 < t_2$
	+	−	−	−	−	
$-1/4$		0				$t_1 = -1$
	+	+	−	−	−	
0				0		$-1 < t_1 < 1 < t_2$
	+	+	−	+	−	
1		0	0	||	||	$t = 1/4$
	+	−	+	−	+	$t_1 < -1 < t_2 < 1$
$+\infty$						

Vậy:

- Với $m < -\frac{1}{4}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = -\frac{1}{4}$, phương trình có nghiệm

$$t_1 = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z.$$

- Với $-\frac{1}{4} < m < 1$, phương trình có nghiệm

$$t_1 = \frac{-m-1-\sqrt{4m^2-3m+3}}{m-1} \Leftrightarrow \cos x = t_1 = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi, k \in Z.$$

- Với m = 1, phương trình có nghiệm

$$t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} = \cos\beta \Leftrightarrow x = \pm\beta + 2k\pi, k \in Z.$$

- Với m > 1, phương trình có nghiệm

$$t_2 = \frac{-m-1+\sqrt{4m^2-3m+3}}{m-1} \Leftrightarrow \cos x = t_2 = \cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\gamma + 2k\pi, k \in Z.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho phương trình:

$$5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2\frac{x}{2} = 3m.$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{4}{3}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Bài tập 2: Cho phương trình:

$$\cos 2x + 5\sin x + m = 0.$$

a. (ĐHNN Hà Nội – 97): Giải phương trình với m = 2.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Bài tập 3: Cho phương trình:

$$4\cos^2 x - 2(m-1)\cos x - m = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = \sqrt{3}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

Bài tập 4: Xác định m để phương trình:

$$m\cos 2x - 4(m-2)\cos x + 3(m-2) = 0$$

có đúng 2 nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 5: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$(m-1)\sin^2 x - 2(m+1)\cos x + 2m - 1 = 0$$

Bài tập 6: Giải và biện luận theo a, b phương trình:

$$\cos ax + \cos 2bx - \cos[(a+2b)x] = 1$$

Bài tập 7: Biện luận số nghiệm của phương trình:

$$\cos^2 x + (1-m)\cos x + m - 1 = 0 \text{ với } 0 < x < \pi$$

tuỳ theo các giá trị của m.

CHỦ ĐỀ 3

PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Giải phương trình bậc cao đối với một hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Đối với phương trình bậc 3:

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0. \qquad (1)$$

ta lựa chọn một trong ba hướng:

Hướng 1: Nếu xác định được nghiệm t_0 thì:

$$(1) \Leftrightarrow (t - t_0)(at^2 + Bt + C) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_0 \\ at^2 + Bt + C = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Khi đó việc giải (1) được dẫn về việc giải (2).

Hướng 2: Sử dụng phương pháp hằng số biến thiên.

Hướng 3: Sử dụng phương pháp hàm số đồ thị.

2. Đối với phương trình bậc 4:

$$at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0. \qquad (3)$$

ta lựa chọn một trong bốn hướng:

Hướng 1: Nếu xác định được nghiệm t_0 thì:

$$(3) \Leftrightarrow (t - t_0)(at^3 + Bt^2 + Ct + D) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_0 \\ at^3 + Bt^2 + Ct + D = 0 \ (4) \end{array}\right.$$

Khi đó việc giải (3) được dẫn về việc giải (4).

Hướng 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Hướng 3: Sử dụng phương pháp hằng số biến thiên.

Hướng 4: Sử dụng phương pháp hàm số đồ thị.

Ví dụ 1: (ĐH Thái Nguyên – 97): Giải phương trình:

$$4\cos^2 x - \cos 3x = 6\cos x + 2(1 + \cos 2x).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) = 6\cos x + 4\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow (4\cos^2 x + 3)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. (ĐH Y&D TPHCM – 99): Tìm m để phương trình có đúng 7 nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}, 2\pi)$.

Giải

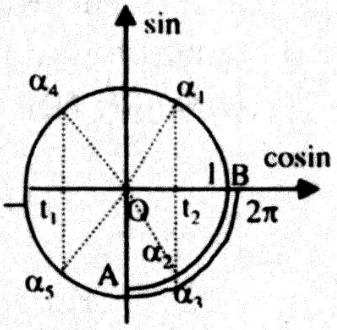
Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos^3x - 3\cos x - (2\cos^2x - 1) + m\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3x - 2\cos^2x + (m-3)\cos x = 0$$

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$, phương trình có dạng:

$$4t^3 - 2t^2 + (m-3)t = 0 \Leftrightarrow (4t^2 - 2t + m - 3)t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ 4t^2 - 2t + m - 3 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$



- Với $t = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \qquad (*)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 4t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z$$

Vậy, với $m = 1$, phương trình có 4 họ nghiệm.

b. Trước hết ta tìm các nghiệm thoả mãn điều kiện đầu bài từ (*), ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \end{array}\right..$$

Vậy để phương trình (1) có đúng 7 nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, 2\pi)$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thoả mãn $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(-1) > 0 \\ af(0) < 0 \\ af(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ m - 3 < 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vậy với $1 < m < 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Để các em học sinh tiện theo dõi ta có thể lý giải điều kiện trên có được bởi:

1. Với $t_2 \in (0, 1)$, thì bằng cách dựng đường thẳng qua t_2 vuông góc với trục cosin ta được ba nghiệm α_1, α_2 và α_3 thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$.
2. Với $t_1 \in (-1, 0)$, thì bằng cách dựng đường thẳng qua t_1 vuông góc với trục cosin ta được hai nghiệm α_4 và α_5 thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$\cot g^3x - 3\cot g^2x + m = 0. \qquad (1)$$

a. Với m = −1, phương trình có mấy nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$?

b. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc $(0, \pi)$.

Giải

Điều kiện:

$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi,\ k \in Z.$

Đặt cotgx = t, khi đó phương trình có dạng:

$t^3 - 3t^2 + m = 0.$

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = t^3 - 3t^2$ với đường thẳng $y = -m$.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên R.

Đạo hàm:

$$y' = 3t^2 - 6t,\ y' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	−4	↗	$+\infty$

a. Với m = − 1, đường thẳng y = 1 cắt đồ thị hàm số tại một điểm có hoành độ $t_1 > 2$, suy ra phương trình (1) nghiệm duy nhất thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

b. Để phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc $(0, \pi)$ điều kiện là:

$-4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$tg^4x + (2m-1)tg^3x + (m^2-2m)tg^2x - (m^2-m+1)tgx - m + 1 = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m = − 1.

b. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện:

$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$

Đặt tgx = t, khi đó phương trình có dạng:

$$t^4 + (2m-1)t^3 + (m^2-2m)t^2 - (m^2-m+1)t - m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3 + 2mt^2 + m^2t + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t^3 + 2mt^2 + m^2t + m - 1 = 0 \ (2) \end{array}\right. \qquad (I)$$

Để tiếp tục phân tích (2), ta viết lại (2) dưới dạng:

$$t.m^2 + (2t^2 + 1)m + t^3 - 1 = 0.$$

Coi m là ẩn, còn t là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m và giải ra ta được:

$$\left[\begin{array}{l} m = 1 - t \\ m = -\dfrac{t^2 + t + 1}{t} \end{array}\right.$$

Do đó (2) được chuyển về dạng:

$$(t + m - 1)[t^2 + (m + 1)t + 1] = 0.$$

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t - 1 = 0 & \\ t + m - 1 = 0 & \\ g(t) = t^2 + (m+1)t + 1 = 0 & (3) \end{array}\right. . \qquad (II)$$

a. Với m = – 1:

$$(II) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t - 2 = 0 \\ t^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ tgx = 2 = tg\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

⇔ (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và 1 – m và 1 – m≠1

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ g(1-m) \neq 0 \\ 1 - m \neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m + 3 \neq 0 \\ 3 - 2m \neq 0 \\ m \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < m \neq \dfrac{3}{2} \\ m < -3 \end{array}\right. .$$

Vậy với $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \setminus \{\frac{3}{2}\}$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

II.CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (ĐHNN – 2000): Giải phương trình:

$$2\cos2x - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$[2(2\cos^2x - 1) - 8\cos x + 7]\cos x = 1 \Leftrightarrow 4\cos^3x - 8\cos^2x + 5\cos x - 1 = 0.$$

Đặt t = cosx, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$4t^3 - 8t^2 + 5t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^2 - 4t + 1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 2: (ĐHQG TPHCM Khối D – 99): Cho phương trình:

$$(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m.\sin^2 x. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m = –2.

b. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \frac{2\pi}{3}]$.

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m(1 - \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)[\cos 2x - m\cos x - m(1 - \cos x)] = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m) = 0$$

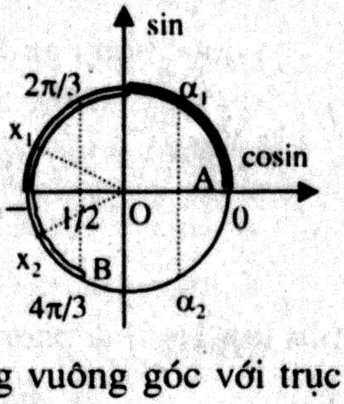
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos 2x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ \cos 2x = m \quad (*) \end{array}\right., k \in Z.$$

a. Với m = –2, phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy với m = –2, phương trình có một họ nghiệm $x = \pi + 2k\pi, k \in Z$.

b. Để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \frac{2\pi}{3}]$

$\Leftrightarrow$ phương trình cost = m (với t = 2x) có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \frac{4\pi}{3}]$



$\Leftrightarrow -1 < m \le -\frac{1}{2}$.

Vậy với $-1 < m \le -\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Để các em học sinh tiện theo dõi ta có thể lý giải điều kiện trên có được bởi:

- Nếu $-\frac{1}{2} < m \le 1$, thì bằng cách dựng đường thẳng vuông góc với trục cosin ta được hai nghiệm α_1 và α_2 nhưng khi đó dễ thấy α_2 không thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$, tức là chỉ có 1 nghiệm được chấp nhận.
- Nếu $-1 < m \le -\frac{1}{2}$, thì bằng cách dựng đường thẳng vuông góc với trục cosin ta được hai nghiệm x_1, x_2 và cả hai nghiệm này đều thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$, tức là có 2 nghiệm được chấp nhận.

Bài 3: (ĐHSP TPHCM Khối A – 2000): Cho phương trình:

$$\sin 3x - m\cos 2x - (m+1)\sin x + m = 0.$$

Tìm m để phương trình có đúng 8 nghiệm thuộc $(0, 3\pi)$.

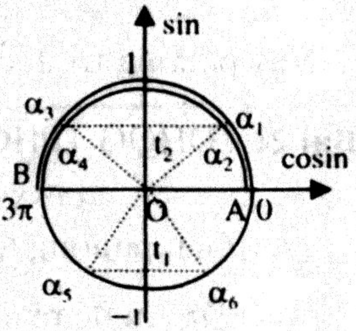
BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin x - 4\sin^3 x - m(1 - 2\sin^2 x) - (m+1)\sin x + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\sin^2 x - 2m\sin x + m - 2)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 4\sin^2 x - 2m\sin x + m - 2 = 0 \quad (1)\end{array}\right.$$



- Với $\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \overset{x\in(-0,3\pi)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}x_1 = \pi\\ x_2 = 2\pi\end{array}\right..$$

- Với phương trình (1), đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \le 1$, ta được:

$$4t^2 - 2mt + m - 2 = 0. \qquad (2)$$

Vậy để phương trình có đúng 8 nghiệm thuộc $(0, 3\pi)$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 6 nghiệm thuộc $(0, 3\pi)\backslash\{\pi, 2\pi\}$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm thoả mãn $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(-1) > 0\\ af(0) < 0\\ af(1) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2 > 0\\ m - 2 < 0\\ -m + 2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < 2.$$

Vậy với $-\frac{2}{3} < m < 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Để các em học sinh tiện theo dõi ta có thể lý giải điều kiện trên có được bởi:

1. Với $t_2 \in (0, 1)$, thì bằng cách dựng đường thẳng qua t_2 vuông góc với trục sin ta được bốn nghiệm α_1, α_2, α_3 và α_4 thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$.
2. Với $t_1 \in (-1, 0)$, thì bằng cách dựng đường thẳng qua t_1 vuông góc với trục sin ta được hai nghiệm α_5 và α_6 thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải phương trình:

$$4(\sin 3x - \cos 2x) = 5(\sin x - 1)$$

Bài tập 2: Cho phương trình:

$$\sin 3x + \sin x - 2\cos^2 x = m.$$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

b. Tìm m để phương trình có 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 3: Xác định m để phương trình:

$$\cos^4 x + (m-2)\sin^2 x + 4 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

CHỦ ĐỀ 4

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình:

$$a\sin x + b\cos x = c. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Kiểm tra:

1. Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó để tìm nghiệm của phương trình (1) ta thực hiện tiếp bước 2.

Bước 2. Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vì $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = 1$ nên tồn tại góc β sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta .$$

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$\sin x.\cos\beta + \sin\beta.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của sin.

Cách 2: Thực theo các bước:

Bước 1. Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, kiểm tra vào phương trình:

Bước 2. Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, đặt $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, suy ra:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$a.\frac{2t}{1+t^2} + b.\frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Leftrightarrow (c+b)t^2 - 2at + c - b = 0. \quad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t.

Cách 3: Với những yêu cầu biện luận số nghiệm của phương trình trong (α, β), ta có thể lựa chọn phương pháp hàm số đồ thị.

Cách 4: Với những yêu cầu biện luận tính chất nghiệm của phương trình trong (α, β), ta có thể lựa chọn phương pháp điều kiện cần và đủ.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D với $D \subset [0, 2\pi]$.
3. Cách 3 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu biện luận theo tham số để phương trình k có nghiệm thuộc tập D với $D \cap [0, 2\pi] \neq \varnothing$.
4. Từ cách giải 1 ta có được kết quả sau:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

kết quả đó gợi ý cho bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số dạng $y = a.\sin x + b.\cos x$, $y = \dfrac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x}$ và phương pháp đánh giá cho một số phương trình lượng giác.

Dạng đặc biệt:

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$
- $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 3x.\cos\frac{\pi}{6} + \cos 3x.\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 3x + \dfrac{\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ x = \dfrac{7\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$3\sin x - 4\cos x = -\frac{5}{2}.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = -\frac{1}{2}$$

Đặt $\frac{3}{5} = \cos\alpha$ thì $\frac{4}{5} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\alpha - \cos x.\sin\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x-\alpha) = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - \alpha = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví du 3: Giải phương trình:

$$\sin 2x - 3\cos 2x = 3$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Đặt $\frac{1}{\sqrt{10}} = \cos\alpha$ thì $\frac{3}{\sqrt{10}} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin 2x.\cos\alpha - \cos 2x.\sin\alpha = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin(2x-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \alpha = \alpha + 2k\pi \\ 2x - \alpha = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x = 3(1 + \cos 2x) \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x = 6\cos^2 x \Leftrightarrow (\sin x - 3\cos x).\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - 3\cos x - 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = 3 = \mathrm{tg}\alpha \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví du 4: Giải phương trình:

$$2\sin x - 3\cos x = -2$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos x = -\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Đặt $\frac{2}{\sqrt{13}} = \cos\alpha$ thì $\frac{3}{\sqrt{13}} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\alpha - \cos x.\sin\alpha = -\cos\alpha \Leftrightarrow \sin(x-\alpha) = \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \alpha = \alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x - \alpha = \pi - \alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(1 + \sin x) = 3\cos x \Leftrightarrow 2(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})^2 = 3(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2})$$

$$\Leftrightarrow [2(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}) - 3(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})](\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0 \\ \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = \frac{1}{5} = tg\alpha \\ tg\frac{x}{2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \alpha + k\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\alpha + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Các em học sinh cần có thói quen kiểm tra điều kiện $a^2 + b^2 \geq c^2$ ra nháp trước khi đi giải phương trình bởi có nhiều bài thi đã cố tình tạo ra những phương trình không thoả mãn điều kiện trên với mục đích kiểm tra kiến thức cơ bản của các em. Cụ thể như đề thi ĐHGTVT – 2000.

Ví dụ 5: (ĐHGTVT – 2000): Giải phương trình:

$$2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}(1 + \cos 2x) = 3 + \cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + (\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$$

Ta có:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} - 1 \\ c = 3 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{2} \\ c^2 = (3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

hú ý: Việc lựa chọn các phép biến đổi lượng giác phù hợp trong nhiều trường hợp ta ẽ tìm được phép biểu diễn chẵn cho các họ nghiệm. Chúng ta xem xét ví dụ sau:

í dụ 6: Giải phương trình:

$$(1 + \sqrt{3})\sin x + (1 - \sqrt{3})\cos x = 2$$

iải

ách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin x + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Đặt $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \cos\alpha$ thì $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x+\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

ách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x + \cos x) + \sqrt{3}(\sin x - \cos x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) - \sqrt{6}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}).\cos\frac{\pi}{3} - \cos(x+\frac{\pi}{4}).\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

hận xét:

. Như vậy bằng cách 1 ta tìm được nghiệm của phương trình không tường minh, trong khi đó nếu sử dụng cách 2 ta thấy nghiệm của phương trình rất chẵn.

. Một vài tài liệu tham khảo giải phương trình bằng cách đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, dẫn tới phương trình

$$(3 - \sqrt{3})t^2 - 2(1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee t_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

- Với $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ta được:

$$\text{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in Z.$$

- Với $t_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ta được:

$$\text{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = -\frac{\text{tg}\frac{\pi}{3} + \text{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \text{tg}\frac{\pi}{3}.\text{tg}\frac{\pi}{4}} = -\text{tg}\frac{7\pi}{12} = \text{tg}\frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{12} + \text{k}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in Z.$$

Ví dụ 7: Giải phương trình:

$$2(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 3\sin 2x + \sqrt{7}\cos 2x$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x = 3\sin 2x + \sqrt{7}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{4}\sin 2x + \frac{\sqrt{7}}{4}\cos 2x$$

Đặt $\frac{3}{4} = \cos\alpha$ thì $\frac{\sqrt{7}}{4} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6} = \sin 2x\cos\alpha + \cos 2x\sin\alpha \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin(2x +$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \alpha = x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x + \alpha = \pi - x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} - \alpha + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{18} - \frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Ví dụ trên đã minh hoạ cụ thể phương pháp giải phương trình dạng:

$$a.\sin(kx) + b.\cos(kx) = c.\sin(lx) + d.\cos(lx) \qquad \text{(I)}$$

với điều kiện $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Và sự mở rộng khác cho dạng phương trình trên như sau:

$$a.\sin(kx) + b.\cos(kx) = \sqrt{a^2 + b^2}\ .\sin(lx) \qquad \text{(II)}$$

để minh hoạ ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 8: Giải phương trình:

$$2\sin x(\cos x - 1) = \sqrt{3}\cos 2x$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin x.\cos x - 2\sin x = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin x \qquad (*)$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin x \Leftrightarrow \sin 2x.\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x.\sin\frac{\pi}{3} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = x + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

hận xét: Như vậy bằng một vài phép biến đổi lượng giác thông thường ta đã uyển phương trình ban đầu về (*) và đó chính là dạng (II).

í du 9: Giải phương trình:

$$\sqrt{2}(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$$

ải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x.\cos\frac{\pi}{3} + \cos x.\sin\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3}.\cos 2x - \cos\frac{\pi}{3}.\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3}).\cos(x + \frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{2} - 2\cos(x + \frac{\pi}{3})]\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

í du 10: Cho phương trình:

$$\sqrt{3}\sin 2x - m\cos 2x = 1.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm với mọi m.

ải

Với m = 1, phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}\sin 2x - m\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x.\cos\frac{\pi}{6} - \cos 2x.\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy với $m = 1$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có:

$$a^2 + b^2 = 3 + m^2 > 1 = c^2, \forall m$$

Vậy phương trình có nghiệm với mọi m.

Ví dụ 11: (ĐHKT – 2001): Giải và biện luận phương trình:

$$4m(\sin x + \cos x) = 4m^2 + 2(\cos x - \sin x) + 3.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(2m + 1)\sin x + 2(2m - 1)\cos x = 4m^2 + 3$$

Xét hiệu

$$a^2+b^2-c^2=4(2m+1)^2+4(2m-1)^2-(4m^2+3)^2=-(16m^4-8m^2+1)=-(4m^2-1)^2\le 0$$

Vậy phương trình chỉ có nghiệm

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}.$$

- Với $m = \frac{1}{2}$, phương trình có dạng:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z.$$

- Với $m = -\frac{1}{2}$, phương trình có dạng:

$$\cos = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in Z.$$

- Với $m \ne \pm\frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 12: Cho phương trình:

$$(m + 2)\sin x - 2m\cos x = 2m + 2. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -2$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Giải

Xét hai trường hợp

- Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, thay vào phương trình ta được:

$$(m + 2)\sin(\pi + 2k\pi) - 2m\cos(\pi + 2k\pi) = 2m + 2 \Leftrightarrow 2m = 2m + 2 \text{ (MT)}$$

Vậy $x = \pi + 2k\pi, k \in Z$ không phải là nghiệm của phương trình với mọi m.

- Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi,\ k\in Z$.

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, suy ra $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ & $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$\frac{(m+2)t}{1+t^2} - \frac{2m(1-t^2)}{1+t^2} = 2m+2 \Leftrightarrow t^2 - (m+2)t + 2m + 1 = 0. \quad (2)$$

a. Với $m = -2$, phương trình (2) có dạng:

$$t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = \sqrt{3} \\ tg\frac{x}{2} = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in Z$$

Vậy với $m = -2$, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Vì $x\in[-\frac{\pi}{2}, 0] \Leftrightarrow \frac{x}{2}\in[-\frac{\pi}{4}, 0]$ suy ra $t\in[-1, 0]$.

Cách 1: Để (1) có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0] \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[-1, 0]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có 1 nghiệm thuộc } [-1,0] \\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc } [-1,0] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(0) \le 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(-1) \ge 0 \\ af(0) \ge 0 \\ -1 \le \frac{S}{2} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (3m+4)(2m+1) \le 0 \\ \begin{cases} m^2 - 4m \ge 0 \\ 3m + 4 \ge 0 \\ 2m + 1 \ge 0 \\ -1 \le \frac{m+2}{2} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le m \le -\frac{1}{2}.$$

Vậy với $-\frac{4}{3} \le m \le -\frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm.

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} = m$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2}$ trên đoạn $[-1, 0]$.

Xét hàm số (C): $y = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2}$ trên đoạn $[-1, 0]$.

Đạo hàm

$$y' = \frac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2} > 0 \text{ với } \forall t \in [-1, 0] \Leftrightarrow \text{hàm số đồng biến trên } [-1, 0].$$

Do đó đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số (C) trên đoạn [− 1, 0]

$$\Leftrightarrow y(-1) \le m \le y(0) \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le m \le -\frac{1}{2}.$$

Vậy với $-\frac{4}{3} \le m \le -\frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 13: Cho phương trình:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = − 1.

b. Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$ của phương trình.

Giải

a. Với m = − 1, phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy với m = − 1 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng y = m với phần đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ trên $D = (-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$.

Xét hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

Miền xác định $D = (-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$.

Đạo hàm:

$$y' = \sqrt{3}\cos x - \sin x,$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{6}) = 0 \overset{x \in D}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \pi/3 \\ x = 4\pi/3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	−π/6		π/3		4π/3		2π
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	2	↘		↗	1
	0				− 2		

Kết luận:

- Với |m| > 2, phương trình vô nghiệm.
- Với m = ±2, phương trình có 1 nghiệm thuộc D.

- Với $-2 < m \le 0$ hoặc $1 < m < 2$, phương trình có 2 nghiệm thuộc D.
- Với $0 < m \le 1$, phương trình có 3 nghiệm thuộc D.

Ví dụ 14: Biện luận theo m số nghiệm thuộc $[0, \frac{3\pi}{2}]$ của phương trình:

$$m\sin x + \cos x = 2m. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos x = m(2 - \sin x) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{2 - \sin x} = m$$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị hàm số $y = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$ trên $D = [0, \frac{3\pi}{2}]$.

Xét hàm số $y = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$.

Miền xác định $D = [0, \frac{3\pi}{2}]$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{-\sin x.(2 - \sin x) + \cos x.\cos x}{(2 - \sin x)^2} = \frac{1 - 2\sin x.}{(2 - \sin x)^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \overset{x\in D}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \pi/6 \\ x = 5\pi/6 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		π/6		5π/6		3π/2
y'		+	0	−	0	+	
y	1/2	↗	$1/\sqrt{3}$	↘	$-1/\sqrt{3}$	↗	0

Kết luận:

- Với $|m| > \frac{1}{\sqrt{3}}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $0 < m < \frac{1}{2}$, phương trình có 1 nghiệm thuộc D.
- Với $-\frac{1}{\sqrt{3}} < m \le 0$ hoặc $\frac{1}{2} \le m < \frac{1}{\sqrt{3}}$, phương trình có 2 nghiệm thuộc D.

Ví dụ 15: Cho phương trình:

$$\sqrt{3}\sin x + m\cos x = 1.$$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [0, 2\pi)$ sao cho $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm $x = \alpha \in [0, \frac{2\pi}{3}]$, khi đó $x = \frac{2\pi}{3} - \alpha$ cũng là nghiệm, như vậy:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin\alpha + m\cos\alpha = 1 \\ \sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha) + m\cos(\frac{2\pi}{3} - \alpha) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\cos\alpha = 1 - \sqrt{3}\sin\alpha \\ m(-\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) = 1 - \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{1 - \sqrt{3}\sin\alpha}{2 - 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (2 - 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha)\cos\alpha = (-\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)(1 - \sqrt{3}\sin\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 3\cos2\alpha + \sqrt{3}\sin2\alpha = 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\alpha + \frac{1}{2}\sin2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos2\alpha.\cos\frac{\pi}{6} + \sin2\alpha.\sin\frac{\pi}{6} = \cos\alpha.\cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha.\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha - \frac{\pi}{6} = \alpha + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\alpha - \frac{\pi}{6} = -\alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{3} \\ \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right..$$

- Với $\alpha = \frac{\pi}{3}$, thay vào phương trình ta được:

  $$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} + m\cos\frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

- Với $\alpha = 0$, thay vào phương trình ta được:

  $$\sqrt{3}\sin0 + m\cos0 = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

- Với $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, thay vào phương trình ta được:

  $$\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3} + m\cos\frac{2\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy với $m = \pm1$ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ:

- Với m = 1, thay vào phương trình ta được:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \overset{x\in[0,2\pi)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Nhận xét rằng khi đó $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}$, do đó m = 1 thoả mãn.

- Với m = −1 – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (ĐHMĐC – 95): Giải phương trình:

$$3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin 3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 \Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

Bài 2: (ĐHMTCN – 96): Giải phương trình:

$$\cos 7x.\cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \sin 7x.\sin 5x$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 7x.\cos 5x + \sin 7x.\sin 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

Bài 3: (ĐHKTQD – 97): Tìm các nghiệm thuộc khoảng $(\frac{2\pi}{5}, \frac{6\pi}{7})$ của phương trình:

$$\sqrt{3}\sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2}$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x - \frac{1}{2}\cos 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 7x.\cos\frac{\pi}{6} - \cos 7x.\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(7x - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 7x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \\ x = \frac{11\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \end{array}\right., k\in Z.$$

- Với họ nghiệm $x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7}$, ta được:

$$\frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{5}{84} < \frac{2k}{7} < \frac{6}{7} - \frac{5}{84} \Rightarrow k = 2$$

Khi đó ta được nghiệm $x_1 = \frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{53\pi}{84}$.

- Với họ nghiệm $x = \frac{11\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7}$, ta được:

$$\frac{2\pi}{5} < \frac{11\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{11}{84} < \frac{2k}{7} < \frac{6}{7} - \frac{11}{84} \Rightarrow k = 1, 2$$

Khi đó ta được nghiệm $x_2 = \frac{11\pi}{84} + \frac{2\pi}{7} = \frac{35\pi}{84}$ & $x_3 = \frac{11\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{59\pi}{84}$.

Bài 4: Cho phương trình:

$$\sin x + m\cos x = m.$$

a. Giải phương trình với $m = \sqrt{3}$.

b. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thuộc $(-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

BÀI GIẢI

. *Bạn đọc tự giải.*

. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x = m(1 - \cos x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \vee x = 2\pi \\ \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = m \quad (*) \end{array}\right.$$

Vậy để phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt thuộc $(-\pi, \frac{7\pi}{3})$ điều iện là phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đường thẳng y = m ới đồ thị hàm số $y = \frac{\sin x}{1-\cos x}$ trên $D = (-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

Xét hàm số $y = \frac{\sin x}{1-\cos x}$.

Miền xác định $D = (-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

Đạo hàm $y' = \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} \le 0, \forall x \in D$,

Bảng biến thiên:

x	$-\pi$		0		2π		$7\pi/3$
y'		–	‖	–	‖	–	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{3}$

Khi đó với $m \le 0 \vee m \ge \sqrt{3}$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt thuộ khoảng $(-\pi, \frac{7\pi}{3})$.

Bài 5: (ĐHTCKT TPHCM – 95): Cho phương trình:

$$m.\sin x + (m+1).\cos x + 1 = 0$$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ và 2 nghiệm này cách nhau $\frac{\pi}{2}$.

BÀI GIẢI

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm $x = \alpha \in [0, \frac{3\pi}{2}]$, khi đó $x = \alpha +$ cũng là nghiệm, như vậy:

$$\begin{cases} m.\sin\alpha + (m+1).\cos\alpha + 1 = 0 \\ m.\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) + (m+1).\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m.\sin\alpha + (m+1).\cos\alpha + 1 = 0 \\ m.\cos\alpha - (m+1).\sin\alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m.(\sin\alpha + \cos\alpha) = -1 - \cos\alpha \\ m(\cos\alpha - \sin\alpha) = \sin\alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha) = (\cos\alpha - \sin\alpha)(1 + \cos\alpha) \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ hoặc } \alpha = \frac{5\pi}{6}.$$

- Với $\alpha = \frac{\pi}{6}$, thay vào phương trình ta được:

$$m.\sin\frac{\pi}{6} + (m+1).\cos\frac{\pi}{6} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

- Với $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, thay vào phương trình ta được:

$$m.\sin\frac{5\pi}{6} + (m+1).\cos\frac{5\pi}{6} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy với $m = -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ – Để nghị bạn đọc tự làm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2x - \sqrt{3}\sin2x = \sin^3x + 1$. b. $3\sin x - \sqrt{3}\cos3x = 4\sin^3x - 1$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $2\cos x(\sin x - 1) = \sqrt{3}\cos2x$. b. $2\sin3x - \sin2x + \sqrt{3}\cos2x = 0$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $3\sin2x + 4\cos2x + 5\cos2003x = 0$. b. $\sqrt{3}\sin4x - \cos4x = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

Bài tập 4: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\sin1972x = 0$.

b. $\sin x = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3}\cos x)$.

Bài tập 5: Giải các phương trình sau:

a. $\sin2x + (\sqrt{3} - 2)\cos2x = 1$. b. $(1 - \sqrt{3})\sin x + (1 + \sqrt{3})\cos x = 2$.

Bài tập 6: Giải các phương trình sau:

a. $3\cos x - \sin2x = \sqrt{3}(\cos2x + \sin x)$.

b. $\sqrt{2}\cos(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) - \sqrt{6}\sin(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) = 2\sin(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}) - 2\sin(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6})$.

Bài tập 7: Cho phương trình: $(m - 1)\sin x - \cos x = 1$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 8: Cho phương trình: $m\sin x + 2\cos x = 1 - m$.

a. Giải phương trình với $m = 2\sqrt{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 9: Cho phương trình: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = m$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(-\frac{5\pi}{6}, 3\pi]$ của phương trình.

Bài tập 10: Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ và 2 nghiệm này cách nhau $\frac{\pi}{2}$:

$$\sqrt{3}\sin3x + m\cos3x = \sqrt{2}.$$

Bài tập 11: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$\frac{a - b\cos x}{\sin x} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}\,\text{tg}y}{1 + \text{tg}^2y}.$$

Bài tập 12: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$m\sin x + (2m - 1)\cos x = 3m - 1 \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

CHỦ ĐỀ 5

PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC HAI ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx

I.KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải phương trình

$$a\sin^2x + b\sin x.\cos x + c\cos^2x = d. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z$.

Khi đó phương trình (1) có dạng $a = d$.

- Nếu $a = d$, thì (1) nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.
- Nếu $a \neq d$, thì (1) không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Bước 2. Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2x\neq 0$, ta được:

$$a\,tg^2x + b\,tgx + c = d(1 + tg^2x)$$

Đặt $t = tgx$, phương trình có dạng:

$$(a - d)t^2 + bt + c - d = 0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t.

Cách 2: Sử dụng các công thức:

$$\sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2} \text{ và } \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ta được :

$$b.\sin 2x + (c - a)\cos 2x = d - c - a \qquad (3)$$

Đây là phương trình bậc nhất của sin và cos.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D với D.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.

Chú ý: Nhiều phương trình ở dạng ban đầu không phải là phương trình đẳng cấp bậc hai, khi đó chúng ta cần đánh giá thông qua một hoặc nhiều phép biến đổi lượng giác. Cụ thể chúng ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$2\sqrt{3}\cos^2x + 6\sin x.\cos x = 3 + \sqrt{3}.$$

Giải

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{3}(1+\cos2x)+3\sin2x=3+\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos2x+\sqrt{3}\sin2x=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi\end{array}\right., k\in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng:

  $0=3+\sqrt{3}$ mâu thuẫn

  Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x\neq0$, ta được;

$$2\sqrt{3}+6\text{tg}x=(3+\sqrt{3})(1+\text{tg}^2x)\Leftrightarrow(3+\sqrt{3})\text{tg}^2x-6\text{tg}x+3-\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{tg}x=1\\ \text{tg}x=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\text{tg}\alpha\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\alpha+k\pi\end{array}\right., k\in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $m.\sin^2x-3\sin x.\cos x-m-1=0$. (1)

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{2})$.

Giải

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng: $-1=0$ mâu thuẫn

  Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

  Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x\neq0$, ta được:

$$m.\text{tg}^2x-3\text{tg}x-(m+1)(1+\text{tg}^2x)=0\Leftrightarrow\text{tg}^2x+3\text{tg}x+m+1=0.$$

Đặt $t = \text{tg}x$, phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + 3t + m + 1 = 0. \quad (2)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -1 \\ \text{tg}x = -2 = \text{tg}\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy với $m = 1$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \dfrac{3\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn $t_1 < 0 < t_2$

$\Leftrightarrow af(0) < 0 \Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1.$

Vậy với $m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: (ĐHTS – 2000): Cho phương trình:

$$2\sin^2 x + \sin x.\cos x - \cos^2 x + m = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Giải và biện luận phương trình theo m.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2.\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = -m$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - 3\cos 2x = -2m - 1. \quad (2)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$\sin 2x - 3\cos 2x = -3$$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \cos\alpha$ thì $\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin 2x.\cos\alpha - \cos 2x.\sin\alpha = -\sin\alpha \Leftrightarrow \sin(2x - \alpha) = \sin(-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \alpha = -\alpha + 2k\pi \\ 2x - \alpha = \pi + \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \alpha + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x = 3(1 - \cos 2x) \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x = 6\sin^2 x \Leftrightarrow (\cos x - 3\sin x).\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - 3\sin x - 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = 3 = \cot g\alpha \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\sin 2x - \frac{3}{\sqrt{10}}\cos 2x = \frac{-2m-1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \sin(2x-\alpha) = \frac{-2m-1}{\sqrt{10}}$$

- Nếu $\left|\frac{-2m-1}{\sqrt{10}}\right| > 1 \Leftrightarrow m > \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$ hoặc $m < \frac{-1-\sqrt{10}}{2}$,

phương trình vô nghiệm.

- Nếu $\left|\frac{-2m-1}{\sqrt{10}}\right| \le 1 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{10}}{2} \le m \le \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$, đặt $\frac{-2m-1}{\sqrt{10}} = \sin\beta$

ta được:

$$\sin(2x-\alpha) = \sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\alpha = \beta + 2k\pi \\ 2x-\alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\alpha+\beta}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi+\alpha-\beta}{2} + k\pi \end{array}\right. k\in Z.$$

Chú ý: Nhiều phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là phương trình đẳng cấp bậc hai, khi đó tự các em học sinh cần biết đánh giá hoặc thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác.

Ví dụ 4: Cho phương trình: $m.\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$, với $m \ne 0$. (1)

a. (ĐHAN – 98): Giải phương trình khi $m = \sqrt{3}$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm

c. Giả sử m là giá trị làm cho phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $x_1 + x_2 \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$. Tính $\cos 2(x_1 + x_2)$ theo m.

Giải

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z$.

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$m\sin x.\cos x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow m\sin x.\cos x = \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ m.\cos x = \sin x \end{array}\right. \overset{\cos x\ne 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ tgx = m \end{array}\right.. \quad (I)$$

a. Với $m = \sqrt{3}$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ tgx = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k\in Z$$

Vậy, với $m = \sqrt{3}$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Từ (I) ta có ngay nhận xét phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

c. Vì $x_1 + x_2 \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, do đó có thể coi:

- x_1 là nghiệm của phương trình $\sin x = 0 \Rightarrow tgx_1 = 0$.
- x_2 là nghiệm của phương trình $tgx = m \Rightarrow tgx_2 = m$.

suy ra:

$$\cos 2(x_1 + x_2) = \cos 2x_1.\cos 2x_2 - \sin 2x_1.\sin 2x_2$$

$$= \frac{1-tg^2x_1}{1+tg^2x_1}.\frac{1-tg^2x_2}{1+tg^2x_2} - \frac{2tgx_1}{1+tg^2x_1}.\frac{2tgx_2}{1+tg^2x_2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Cách 2: Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos x \neq 0$, ta được:

$$m tgx + 1 = 1 + tg^2x \Leftrightarrow tg^2x - m tgx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = m \end{array}\right. . \qquad \text{(II)}$$

a. Với $m = \sqrt{3}$, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy với $m = \sqrt{3}$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Từ (I) ta có ngay nhận xét phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

c. Vì $x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, do đó có thể coi:

- x_1 là nghiệm của phương trình $tgx = 0 \Rightarrow tgx_1 = 0$.
- x_2 là nghiệm của phương trình $tgx = m \Rightarrow tgx_2 = m$.

suy ra $\cos 2(x_1 + x_2) = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$.

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (ĐHKTCN TPHCM – 98): Cho phương trình:

$$\sin^2x + 2(m-1)\sin x.\cos x - (m+1)\cos^2x = m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -2$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + (m-1)\sin 2x - (m+1).\frac{1+\cos 2x}{2} = m$$

$$\Leftrightarrow 2(m-1)\sin 2x - (m+2)\cos 2x = 3m. \qquad (2)$$

a. Với $m = -2$, ta được:

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy với $m = -2$ phương trình có một họ nghiệm.

b. Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm:

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 + (m+2)^2 \geq 9m^2 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1.$$

Vậy, với $-2 \leq m \leq 1$ phương trình có nghiệm.

Bài 2: (ĐHGTVT – 99): Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x \in (0, \frac{\pi}{4})$:

$$m.\cos^2x - 4\sin x.\cos x + m - 2 = 0. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Với $x \in (0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \cos x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x \neq 0$, được:

$$m - 4\text{tg}x + (m-2)(1 + \text{tg}^2x) = 0 \Leftrightarrow (m-2)\text{tg}^2x - 4\text{tg}x + 2m - 2 = 0. \quad (2)$$

Đặt $t = \text{tg}x$, vì $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ nên $t \in (0, 1)$, ta được:

$$(m-2)t^2 - 4t + 2m - 2 = 0. \qquad (3)$$

Khi đó (1) có nghiệm $x \in (0, \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t \in (0, 1)$.

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đại số:

- Với $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, khi đó (3) có dạng:

$$-4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in (0, 1)$$

Vậy m = 2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

- Với $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, khi đó (3) có nghiệm $t \in (0, 1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(3)\text{ có 1 nghiệm thuộc }(0,1)\\(3)\text{ có 2 nghiệm thuộc }(0,1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(1).f(0) < 0\\ \begin{cases}\Delta' \geq 0\\ af(1) > 0\\ af(0) > 0\\ 0 < \dfrac{S}{2} < 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(3m-8)(2m-2) < 0\\ \begin{cases}-2m^2 + 6m \geq 0\\ (m-2)(3m-8) > 0\\ (m-2)(2m-2) > 0\\ 0 < \dfrac{2}{m-2} < 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < m < \frac{8}{3}.$$

Vậy với $1 < m < \frac{8}{3}$ phương trình có nghiệm $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

Cách 2: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{2t^2 + 4t + 2}{t^2 + 2} = m$$

Phương trình (1) có nghiệm $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow$ đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2t^2 + 4t + 2}{t^2 + 2}$ trên (0, 1).

Xét hàm số (C) $y = \dfrac{2t^2 + 4t + 2}{t^2 + 2}$ trên khoảng (0, 1).

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-4t^2 + 4t + 8}{(t^2+2)^2} = \dfrac{-4(t+1)(t-2)}{(t^2+2)^2} > 0$ với $\forall t \in (0, 1)$

ic là hàm số đồng biến trên (0, 1).

Do đó đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số (C) trên khoảng (0, 1)

$$\Leftrightarrow y(0) < m < y(1) \Leftrightarrow 1 < m < \frac{8}{3}.$$

Vậy, với $1 < m < \dfrac{8}{3}$ phương trình có nghiệm $x \in (0, \dfrac{\pi}{4})$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

ài tập 1. Giải các phương trình:

a. $4\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin2x - 2\cos^2x = 4$.

b. $2\sin^2x + 3\cos^2x = 5\sin x.\cos x$.

ài tập 2. Giải các phương trình:

a. $\sin^2x - 3\sin x.\cos x = 1$. B. $4\sin x + 6\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$.

ài tập 3. Cho phương trình: $3\sin^2x + m.\sin2x + 4\cos^2x = 0$.

a. Giải phương trình khi m = 4.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

ài tập 4. Cho phương trình:

$$(m+1)\sin^2x - 2\sin x.\cos x + \cos2x = 0.$$

a. Giải phương trình khi m = 0.

b. Xác định m để phương trình đúng hai nghiệm thuộc $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

ài tập 5. Cho phương trình:

$$2\sin^2x + (5m-2)\sin2x - 3(m+1)\cos^2x = 3m.$$

a. Giải phương trình khi $m = \dfrac{2}{3}$.

b. Xác định m để phương trình đúng ba nghiệm thuộc $(-\dfrac{\pi}{2}, \pi)$.

ài tập 6. Cho phương trình: $m\sin x + (m+1)\cos x = \dfrac{m}{\cos x}$.

a. Giải phương trình khi $m = \dfrac{1}{2}$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

c. Giả sử m là giá trị làm cho phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $x_1 + x_2 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Tính $\cos2(x_1 + x_2)$ theo m.

ài tập 7. Giải và biện luận phương trình: $\cos^2x + 8\sin x.\cos x + 7\sin^2x = m$.

ài tập 8. Giải và biện luận phương trình: $(m^2+2)\cos^2x - 2m.\sin2x + 1 = 0$.

CHỦ ĐỀ 6

PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC BA ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Giải phương trình:

$$a.\sin^3x + b.\sin^2x.\cos x + c.\sin x.\cos^2x + d.\cos^3x = 0. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Khi đó phương trình (1) có dạng $a = 0$.

- Nếu $a = 0$, thì (1) nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.
- Nếu $a \neq 0$, thì (1) không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Bước 2: Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x \neq 0$, ta được:

$$a.tg^3x + b.tg^2x + c.tgx + d = 0.$$

Đặt $t = tgx$, phương trình có dạng:

$$a.t^3 + b.t^2 + c.t + d = 0. \qquad (2)$$

Bước 3: Giải phương trình (2) theo t.

Mở rộng: Phương pháp giải trên được mở rộng cho phương trình đẳng cấp bậc n đối với sin và cos, đó là phương trình có dạng:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sin^{n-k} x.\cos^k x = 0.$$

Tuy nhiên để linh hoạt, các em học sinh cần nhớ rằng vì $\sin^2x + \cos^2x = 1$ nên với các nhân tử có bậc k cũng được coi là có bậc $k + 2l$, do vậy chúng ta có dạng mở rộng của phương trình thuần nhất bậc ba như sau:

$$a.\sin^3x + b.\sin^2x.\cos x + c.\sin x.\cos^2x + d.\cos^3x + (e.\sin x + f.\cos x) = 0.$$

Ví dụ 1: (ĐHNT – 96): Giải phương trình sau:

$$4\sin^3x + 3\sin^2x.\cos x - \sin x - \cos^3x = 0.$$

Giải

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$4\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0 \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy phương trình không nhận $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta được

$$4tg^3x+3tg^2x-(1+tg^2x).tgx-1=0 \Leftrightarrow 3tg^3x+3tg^2x-tgx-1=0.$$

Đặt $t = tgx$, phương trình có dạng:

$$3t^3+3t^2-t-1=0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\\ t=1/\sqrt{3}\\ t=-1/\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=-1\\ tgx=1/\sqrt{3}\\ tgx=-1/\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau:

$$\sin^4x-3\sin^2x.\cos^2x-4\sin x.\cos^3x-3\cos^4x=0$$

Giải

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

Khi đó phương trình có dạng $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$ mâu thuẫn.

Vậy phương trình không nhận $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^4 x \neq 0$, ta được:

$$tg^4x-3tg^2x-4tgx-3=0.$$

Đặt $t = tgx$, phương trình có dạng:

$$t^4-3t^2-4t-3=0 \Leftrightarrow (t^4-2t^2+1)-(t^2+4t+4)=0 \Leftrightarrow (t^2-t-3)(t^2+t+1)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2-t-3=0\\ t^2+t+1=0\ \text{(vn)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\\ t_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}=tg\alpha\\ tgx=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}=tg\beta\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k\pi\\ x=\beta+k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Tồn tại những phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là phương trình thuần nhất, khi đó cần thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác thích hợp.

Ví dụ 3: (ĐHNN I Khối B – 99): Giải phương trình sau:

$$(\text{tg}x + 1)\sin^2 x = 3(\cos x - \sin x)\sin x + 3.$$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được:

$$(\text{tg}x + 1)\text{tg}^2 x = 3(1 - \text{tg}x)\text{tg}x + 3(1 + \text{tg}^2 x) \Leftrightarrow \text{tg}^3 x + \text{tg}^2 x - 3\text{tg}x - 3 = 0.$$

Đặt $t = \text{tg}x$, phương trình có dạng:

$$t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \sqrt{3} \\ t = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -1 \\ \text{tg}x = \sqrt{3} \\ \text{tg}x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐHQG TPHCM – 98): Giải phương trình sau:

$$\sin^3(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sqrt{2}\sin^3(x - \frac{\pi}{4}) = 4\sin x \Leftrightarrow [\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})]^3 = 4\sin x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^3 = 4\sin x.$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng:

  $$\sin^3(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 4\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) \text{ mâu thuẫn.}$$

  Vậy phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta được:

  $$(\text{tg}x - 1)^3 = 4(1 + \text{tg}^2 x)\text{tg}x \Leftrightarrow 3\text{tg}^3 x + 3\text{tg}^2 x + \text{tg}x - 1 = 0$$

  Đặt $t = \text{tg}x$, phương trình có dạng:

  $$3t^3 + 3t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(3t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

  $$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chu ý: Các em học sinh cũng cần nhớ rằng ngoài phương pháp chính quy để giải mọi phương trình đẳng cấp bậc 3 thì trong một vài trường hợp riêng biệt cũng có thể giải nó bằng phương pháp phân tích thành phương trình tích. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: (ĐHTS – 96): Giải phương trình sau:

$$\cos^3x + \sin^3x = \sin x - \cos x. \qquad (1)$$

Giải

Cách 1: Sử dụng phương pháp giải phương trình đẳng cấp bậc 3:

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng:

  $$\pm 1 = \pm 1$$

  Vậy phương trình nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x \neq 0$, ta được:

  $$1 + tg^3x = (1 + tg^2x)tgx - (1 + tg^2x) \Leftrightarrow tg^2x - tgx + 2 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng phương pháp phân tích

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos^3x + \sin^3x = (\sin x - \cos x)(\cos^2x + \sin^2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3x + \cos x.\sin^2x - \sin x.\cos^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2x + \sin^2x - \sin x.\cos x)\cos x = 0 \Leftrightarrow (1 + \cos^2x - \sin x.\cos x)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$\frac{1 - tgx}{1 + tgx} = 1 + \sin 2x.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ tgx \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in Z. \qquad (I)$$

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=(\cos x+\sin x)^2 \Leftrightarrow \cos x-\sin x=(\cos x+\sin x)^3$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x\neq 0$, ta được:

$$1+tg^2x-(1+tg^2x)tgx=(1+tgx)^3 \Leftrightarrow tg^3x+tg^2x+2tgx=0$$

$$\Leftrightarrow (tg^2x+tgx+2)tgx=0 \Leftrightarrow tgx=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=(\cos x+\sin x)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}=2\sin^2(x+\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \cot g(x+\frac{\pi}{4})=\frac{2}{1+\cot g^2(x+\frac{\pi}{4})}$$

Đặt $t=\cot g(x+\frac{\pi}{4})$, ta được:

$$t=\frac{2}{1+t^2} \Leftrightarrow t^3+t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow t=1$$

$$\Leftrightarrow \cot g(x+\frac{\pi}{4})=1 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 7: Giải phương trình sau:

$$(\sin x-2\cos x)^4+(\sin x-2\cos x)(5-7\sin 2x+7\cos^2x)\cos x+\cos^4x=0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x-2\cos x)^4+(\sin x-2\cos x)(5\sin^2x-14\sin x.\cos x+13\cos^2x)\cos x+\cos^4x=0.$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$

  Khi đó phương trình có dạng:

  $$\sin^4(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0 \text{ mâu thuẫn.}$$

  Vậy phương trình không nhận $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^4x\neq 0$, ta được:

  $$(tgx-2)^4+(tgx-2)(5tg^2x-14tgx+13)+1=0$$

  Đặt $t=tgx$, phương trình có dạng:

  $$(t-2)^4+(t-2)(5t^2-14t+13)+1=0. \qquad (1)$$

Nhận xét rằng đây không phải là một phương trình hồi quy, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ có một phương trình hồi quy.

Thật vậy, đặt $y = t - 2$.

$$(1) \Leftrightarrow y^4 + y[5(y+2)^2 - 14(y+2) + 13] + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 5y + 1 = 0. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương:

$$(y^2 + \frac{1}{y^2}) + 5(y + \frac{1}{y}) + 6 = 0$$

Đặt $u = y + \frac{1}{y}$, điều kiện $|u| \geq 2$, suy ra $y^2 + \frac{1}{y^2} = u^2 - 2$.

Khi đó phương trình trên có dạng:

$$u^2 + 5u + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = -1 & \text{(loại)} \\ u = -4 \end{array}\right.$$

- Với $u = -4$, ta được:

$$y + \frac{1}{y} = -4 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -2 - \sqrt{3} \\ y_2 = -2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -\sqrt{3} \\ t_2 = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -\sqrt{3} \\ tgx = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 8: Cho phương trình:

$$2(m-2)\sin^3x - (5m-2)\sin^2x.\cos x + 2\sin x.\cos^2x - (m+1)\cos^3x = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 3$.

b. Xác định m để phương trình có đúng một nghiệm $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Giải.

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng:

$$2(m-2)\sin^3(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x \neq 0$, ta được:

$$2(m-2)tg^3x - (5m-2)tg^2x + 2tgx - m - 1 = 0.$$

  Đặt $t = tgx$, phương trình có dạng:

$$2(m-2)t^3 - (5m-2)t^2 + 2t - m - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)[(m-2)t^2 - 2mt + m + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t-1=0 \\ g(t)=(m-2)t^2-2mt+m+1=0 \ (2) \end{array}\right. \qquad \text{(I)}$$

a. Với m = 3, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t-1=0 \\ t^2-6t+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=3-\sqrt{5} \\ t=3+\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x=\dfrac{1}{2}=\mathrm{tg}\alpha \\ \mathrm{tg}x=3-\sqrt{5}=\mathrm{tg}\beta \\ \mathrm{tg}x=3+\sqrt{5}=\mathrm{tg}\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k\pi \\ x=\beta+k\pi \\ x=\gamma+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng một nghiệm $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (I) có duy nhất nghiệm $t = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 1: Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow -4t+3=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ m = 2 không thoả mãn.

Trường hợp 2: Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Khi đó điều kiện:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_g<0 \\ \begin{cases} \Delta'_g=0 \\ g(\frac{1}{2})=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2<0 \\ \begin{cases} m+2=0 \\ m+2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Vậy với $m \leq -2$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 9: Cho phương trình:

$$\sin^3x - 3m.\sin^2x.\cos x + 3(m^2-1)\sin x.\cos^2x - (m^2-1)\cos^3x = 0. \ (1)$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Xác định m để phương trình có đúng ba nghiệm $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Giải.

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng:

  $$\sin^3(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0 \text{ mâu thuẫn.}$$

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta được:

$$\mathrm{tg}^3 x - 3m\,\mathrm{tg}^2 x + 3(m^2 - 1)\mathrm{tg}x - m^2 + 1 = 0$$

Đặt $t = \mathrm{tg}x$, phương trình có dạng:

$$t^3 - 3mt^2 + 3(m^2 - 1)t - m^2 + 1 = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = 0 \\ \mathrm{tg}x = 3 = \mathrm{tg}\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng ba nghiệm $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (2) có ba nghiệm phân biệt dương.

Xét hàm số $y = t^3 - 3mt^2 + 3(m^2 - 1)t - m^2 + 1$.

Ta có:

$$y' = 3t^2 - 6mt + 3(m^2 - 1),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6mt + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0. \quad (3)$$

Ta có:

$$\Delta' = m^2 - m^2 + 1 = 1 > 0, \forall m$$

Khi đó (3) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = m - 1$ & $t_2 = m + 1$ với $\forall m$.

- Trước hết điều kiện để đồ thị hàm số cắt Ot tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \Leftrightarrow y(t_1)y(t_2) < 0. \quad (4)$

Khi đó để giải bất phương trình (4) trước hết đi tính $y(t_1)$, $y(t_2)$ bằng cách:

- Thực hiện phép chia y cho y' ta được:

$$y = \frac{1}{3}y'(t - m)t - 2t + m^3 - m^2 - m + 1.$$

- Khi đó:

$$y(t_1) = (m - 1)(m^2 - 3) \ \&\ y(t_2) = (m + 1)(m^2 - 2m - 1).$$

Suy ra :

$$(4) \Leftrightarrow (m - 1)(m^2 - 3)(m + 1)(m^2 - 2m - 1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3} < m < -1 \\ 1 - \sqrt{2} < m < 1 \\ \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2} \end{array}\right. . \quad (I)$$

- Đồ thị hàm số cắt Ot tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương là:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \\ y(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m + 1 > 0 \\ -(m^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1. \qquad (II)$$

Kết hợp (I) và (II) được $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$.

Vậy, với $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví du 10: Cho phương trình:

$$m\cos^4x + \cos2x(\sin x + 3\cos x)(\sin x + 5\cos x) = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 9$.

b. Xác định m để phương trình có đúng bốn nghiệm $x\in(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$m\cos^4x - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x + 3\cos x)(\sin x + 5\cos x) = 0. \quad (2)$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng:

  $$-\sin^4(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0 \text{ mâu thuẫn.}$$

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z$

  Chia hai vế của phương trình (2) cho $\cos^4x \neq 0$, ta được:

  $$m - (tgx - 1)(tgx + 1)(tgx + 3)(tgx + 5) = 0$$

  Đặt $u = tgx$, phương trình có dạng:

  $$m - (u-1)(u+1)(u+3)(u+5) = 0 \Leftrightarrow (u^2 + 4u - 5)(u^2 + 4u + 3) = m.$$

  Đặt $t = u^2 + 4u - 5$, điều kiện $u \geq -9$.

  Suy ra $u^2 + 4u + 3 = t + 8$. Khi đó phương trình trên có dạng:

  $$t(t + 8) = m \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 8t - m = 0. \qquad (3)$$

a. Với $m = 9$, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow t^2 + 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u^2 + 4u - 5 = 1 \\ u^2 + 4u - 5 = -9 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2 - \sqrt{8} \\ u = 2 + \sqrt{8} \\ u = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 2 - \sqrt{8} = tg\alpha \\ tgx = 2 + \sqrt{8} = tg\beta \\ tgx = 2 = tg\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \beta + k\pi \\ x = \gamma + k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

b. Phương trình (1) có 4 nghiệm $x\in(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $-9 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-9) > 0 \\ S/2 > -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + m > 0 \\ 9 - m > 0 \\ -4 > -9 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9.$$

Vậy, với $-16 < m < 9$ phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x\in(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (HVKTQS – 96): Giải phương trình sau:

$$\sin 3x = 2\cos^3 x.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$3\sin x - 4\sin^3 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + 2\cos^3 x = 0$ – *Bạn đọc tự giải tiếp.*

Bài 2: (ĐHQG – 96): Giải phương trình sau:

$$1 + 3\sin 2x = 2\operatorname{tg} x.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$\cos x + 6\sin x.\cos^2 x = 2\sin x$ – *Bạn đọc tự giải tiếp.*

Bài 3: (ĐHQG – 98): Giải phương trình $8\cos^3(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 3x$.

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$8\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^3 = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sqrt{3}\sin x)^3 = 4\cos^3 x - 3\cos x. \qquad (1)$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng

  $$[-\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)]^3 = 0 \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta được:

  $$[1 - \sqrt{3}(1 + \operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg} x]^3 = 4 - 3(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

  $$\Leftrightarrow \sqrt{3}\operatorname{tg}^3 x - 4\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$$

  Đặt $t = \operatorname{tg} x$, phương trình có dạng:

  $$\sqrt{3}t^3 - 4t^2 + \sqrt{3}t = 0 \Leftrightarrow t(\sqrt{3}t^2 - 4t + \sqrt{3}) = 0$$

  $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \sqrt{3} \\ t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 4: Cho phương trình:

$$m\sin^3x + (3m-4)\sin^2x.\cos x + (3m-7).\sin x.\cos^2x + (m-3)\cos^3x = 0 \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 3$.

b. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-\frac{\pi}{2}, 0]$

BÀI GIẢI

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z$, ta được:

$$m\sin^3(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3x \neq 0$, ta được:

$$m.tg^3x + (3m-4)tg^2x + (3m-7)tgx + m - 3 = 0$$

Đặt $t = tgx$, phương trình có dạng:

$$mt^3 + (3m-4)t^2 + (3m-7)t + m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)[mt^2 + 2(m-2)t + m - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \\ g(t) = mt^2 + 2(m-2)t + m - 3 = 0 \ (2) \end{array}\right. \qquad (I)$$

a. Với $m = 3$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \\ 3t^2 + 2t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=-2/3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=-1 \\ tgx=0 \\ tgx=-2/3=tg\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k\pi \\ x=\alpha+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy, với m = 3 phương trình có ba họ nghiệm.

b. Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-\frac{\pi}{2}, 0]$

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt không dương $(t_1 < t_2 \leq 0)$ khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta'_g > 0 \\ ag(0) \geq 0 \\ \frac{S}{2} < 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m > 0 \\ m(m-3) \geq 0 \\ -\frac{m-2}{m} < 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m < 4.$$

Vậy, với $m \in [3, 4)$ phương trình có ba nghiệm phân biệt không dương.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. (ĐH Đà Nẵng – 99): $\cos^3x - \sin^3x = \cos x - \sin x$.

b. (ĐHL – 96): $4\sin^3x - \sin^2x.\cos x - 3\sin x + 3\cos^3x = 0$.

c. $\sin^3x - 5\sin^2x.\cos x + 7\sin x.\cos^2x - 2\cos^3x = 0$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$.

b. $\sin^3x - 5\sin^2x.\cos x - 3\sin x.\cos^2x + 3\cos^3x = 0$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3x - 3\sin x.\cos^2x - \cos^3x = 0$.

b. $\sin^3x + \sin x.\cos^2x - \cos^3x = 0$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. (HVNH TPHCM – 2000): $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0$.

b. (ĐHY Hà Nội – 99): $4\sin^3x - \sin x - \cos x = 0$.

Bài tập 5. Tìm tất cả các nghiệm $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ của các phương trình:

a. $\sin x.(2\sin^2x - \cos^2x)(8\sin^4x - 8\sin^2x.\cos^2x + \cos^4x) = 0$.

b. $64\sin^6x - 96\sin^4x.\cos^2x + 36\sin^2x.\cos^4x - 3\cos^6x = 0$.

Bài tập 6. Cho phương trình :

$$\sin^3x - 3(m + 1)\sin^2x.\cos x + 2(m^2 + 4m + 1)\sin x.\cos^2x - 4m(m + 1).\cos^3x = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -1$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

Bài tập 7. Cho phương trình :

$$\sin^3x - 3\sin^2x.\cos x + 2(m - 1)\sin x.\cos^2x + (m - 3)\cos^3x = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thoả mãn:

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < -\frac{\pi}{4} < x_2 < x_3 < \frac{\pi}{2}.$$

Bài tập 8. Cho phương trình :

$$2(2 - 3m)\sin^3x + 3(2m - 1)\sin x + 2(m - 2)\sin^2x.\cos x - (4m - 3)\cos x = 0$$

a. Giải phương trình khi $m = 2$.

b. Tìm m để $[0, \frac{\pi}{4}]$ chứa đúng 1 nghiệm của phương trình.

Bài tập 9. Xác định $m \neq 0$ để phương trình:

$$m^2\sin^3x - 3m.\sin^2x.\cos x + (m^2 + 2)\sin x.\cos^2x - m.\cos^3x = 0$$

có đúng ba nghiệm $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 10. Giải và biện luận phương trình:

$$(8a^2 + 1)\sin^3x - (4a^2 + 1)\sin x + 2\cos^3x = 0.$$

CHỦ ĐỀ 7

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Giải phương trình :

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $\sin x + \cos x = t$, đk $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$at + b\frac{t^2-1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Giải (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Với $t = t_0$, ta được:

$$\sin x + \cos x = t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = t_0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{t_0}{\sqrt{2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của sin.

Chú ý : Ta có thể giải (1) bằng cách đặt ẩn phụ $z = \frac{\pi}{4} - x$, khi đó ta có:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}\cos z$$

$$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{4} - z) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} - 2z) = \frac{1}{2}\cos 2z = \frac{1}{2}(2\cos^2 z - 1)$$

Vậy ta chuyển phương trình ban đầu về dạng phương trình bậc 2 đối với cosz.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x + 1 = 0.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t - (t^2 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Đặt $z = \frac{\pi}{4} - x$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) - \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - \sin 2(\frac{\pi}{4} - z) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - \sin(\frac{\pi}{2} - 2z) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - \cos 2z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos z - (2\cos^2 z - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2 z + \sqrt{2}\cos z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos z = \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ \cos z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} - x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} - x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \\ x = \pi - 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Tồn tại những phương trình ở dạng ban đầu chưa phải là phương trình đối xứng, khi đó cần thực hiện một vài phép biến đổi lượng giác thích hợp.

Ví dụ 2: (ĐHMĐC – 99): Giải phương trình: $1 + \text{tg}x = 2\sqrt{2}\sin x$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x.\cos x$$

Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t = \sqrt{2}(t^2 - 1) \Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right., (k \in Z).$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$m(\sin x + \cos x) + \sin 2x + m - 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 2.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$mt + (t^2 - 1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + mt + m - 2 = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 2 phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in Z).$$

Vậy, với m = 2 phương trình có một họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thoả mãn $|t| \le \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có 1 nghiệm thuộc } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-\sqrt{2}).f(\sqrt{2}) \le 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(\sqrt{2}) \ge 0 \\ af(-\sqrt{2}) \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le \dfrac{S}{2} \le \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (-m\sqrt{2} + m).(m\sqrt{2} + m) \le 0 \\ \begin{cases} m^2 - 4m + 8 \ge 0 \\ m\sqrt{2} + m \ge 0 \\ -m\sqrt{2} + m \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le -\dfrac{m}{2} \le \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall m.$$

Vậy với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Cách 2: Viết lại (2) dưới dạng:

$$2 - t^2 = m(t + 1) \overset{t=-1 \text{ không là nghiệm}}{\Leftrightarrow} \frac{2 - t^2}{t + 1} = m.$$

Phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2 - t^2}{t + 1}$ trên D = (−1, 1].

Xét hàm số $y = \dfrac{2 - t^2}{t + 1}$ trên D = (− 1, 1]

Đạo hàm:

$$y' = \frac{-t^2 - 2t - 2}{t + 1} < 0 \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên D.}$$

Do đo đường thẳng y = m luôn cắt đồ thị hàm số trên D ⇔ với mọi n phương trình luôn có nghiệm.

Bài toán 2: Giải phương trình :

$$a(\sin x - \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1: Đặt $\sin x - \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$at + b\frac{1-t^2}{2} + c = 0 \Leftrightarrow bt^2 - 2at - 2c - b = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Giải phương trình (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.

Với $t = t_0$, ta được:

$$\sin x + \cos x = t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = t_0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{t_0}{\sqrt{2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của sin.

Chú ý : Cũng như trong bài toán 1, ta có thể giải phương trình nửa đối xứng đối với sinx và cosx bằng cách đặt ẩn phụ $z = \frac{\pi}{4} - x$.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$6(\sin x - \cos x) + \sin x\cos x + 6 = 0.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đặt $\sin x - \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$6t - \frac{1-t^2}{2} + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 12t - 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 13 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x - \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Đặt $z = \frac{\pi}{4} - x$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$6\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\sin 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow 12\sqrt{2}\sin(-z) + \sin 2(\frac{\pi}{4} - z) + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -12\sqrt{2}\sin z + \sin(\frac{\pi}{2} - 2z) + 12 = 0 \Leftrightarrow -12\sqrt{2}\sin z + \cos 2z + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -12\sqrt{2}\sin z + (1 - 2\sin^2 z) + 12 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 z - 12\sqrt{2}\sin z + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin z = -\dfrac{13\sqrt{2}}{2}\ (\text{loại})\\ \sin z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ z=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{4}-x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ \dfrac{\pi}{4}-x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}-2k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 5: Cho phương trình sau:

$$4(\cos x - \sin x) + \sin 2x = m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4(\cos x - \sin x) + 2\sin x.\cos x = m$$

Đặt $\cos x - \sin x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$4t + 1 - t^2 = m \Leftrightarrow -t^2 + 4t + 1 - m = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$-t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0\\ t = 4\ (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta đi xét bài toán ngược "*Tìm m để phương trình có nghiệm*"

Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thoả mãn $|t| \le \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2)\text{ có 1 nghiệm thuộc }[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\\ (2)\text{ có 2 nghiệm thuộc }[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-\sqrt{2}).f(\sqrt{2}) \le 0\\ \begin{cases}\Delta' \ge 0\\ af(\sqrt{2}) \ge 0\\ af(-\sqrt{2}) \ge 0\\ -\sqrt{2} \le \dfrac{S}{2} \le \sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(-1-4\sqrt{2}-m).(1+4\sqrt{2}-m) \le 0\\ \begin{cases}5-m \ge 0\\ 1+4\sqrt{2}-m \ge 0\\ -1-4\sqrt{2}-m \ge 0\\ -\sqrt{2} \le 2 \le \sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow |m| \le 4\sqrt{2} + 1$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $|m| > 4\sqrt{2} + 1$.

Cách 2: Viết lại (2) dưới dạng:

$$-t^2 + 4t + 1 = m$$

Vậy phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ không cắt phần đồ thị hàm số $y = -t^2 + 4t + 1$ trên $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Xét hàm số $y = -t^2 + 4t + 1$ trên $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Đạo hàm:

$y' = -2t + 4 > 0, \forall t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, do đó hàm số đồng biến trên $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Từ đó, ta được điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} m < y(-\sqrt{2}) \\ m > y(\sqrt{2}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4\sqrt{2} - 1 \\ m > 4\sqrt{2} + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow |m| > 4\sqrt{2} + 1.$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $|m| > 4\sqrt{2} + 1$.

Ví dụ 6: Cho phương trình sau:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có đúng ba nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x - \cos x) + 3\sin x.\cos x(\sin x - \cos x) = m$$

Đặt $\sin x - \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \dfrac{1 - t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^3 + 3t.\frac{1 - t^2}{2} = m \Leftrightarrow -t^3 + 3t = 2m. \qquad (2)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Với $x \in [0, \pi] \Rightarrow t \in [-1, \sqrt{2}]$.

Ta có nhận xét sau:

- Với mỗi $t_0 \in (-1, 1)$ hoặc $t_0 = \sqrt{2}$ thì phương trình:

$$\sin x - \cos x = t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = t_0 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{t_0}{\sqrt{2}}$$

- sẽ có đúng 1 nghiệm $x \in [0, \pi]$.

- Với mỗi $t_0 \in [1, \sqrt{2})$ thì phương trình:

$$\sin x - \cos x = t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = t_0 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{t_0}{\sqrt{2}}$$

sẽ có đúng 2 nghiệm $x \in [0, \pi]$.

Vậy để phương trình (1) có đúng ba nghiệm thuộc $[0, \pi]$

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thoả mãn $-1 < t_1 < 1 < t_2 < \sqrt{2}$.

Xét hàm số $y = -t^3 + 3t$ trên $[-1, \sqrt{2}]$.

Đạo hàm:

$$y' = -3t^2 + 3,\ y' = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-1		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	▨		$+$	0	$-$		▨
y	▨	-2	↗	2	↘	$\sqrt{2}$	▨

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$\sqrt{2} < 2m < 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1.$$

Cách 2: Số nghiệm thuộc $[0, \pi]$ của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin^3 x - \cos^3 x$ trên $[0, \pi]$ với đường thẳng $y = m$.

Xét hàm số $y = \sin^3 x - \cos^3 x$ trên $[0, \pi]$.

Đạo hàm:

$$y' = -3\cos x.\sin^2 x + 3\sin x.\cos^2 x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3\cos x.\sin^2 x + 3\sin x.\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(\sin x + \cos x)\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = k\pi \end{array}\right. \overset{x \in [0,\pi]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		$\pi/2$		$3\pi/4$		π	$+\infty$
y'	▨	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	▨
y	▨	-1	↗	1	↘	$\sqrt{2}/2$	↗	1	▨

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1.$$

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (Đề 2): Giải phương trình:

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin x + \cos x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x.\cos x} - \frac{10}{3} = 0.$$

Đặt $\sin x + \cos x = t$, đk $|t| \leq \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t + \frac{2t}{t^2 - 1} - \frac{10}{3} = 0 \Leftrightarrow 3t^3 - 10t^2 + 3t + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(3t^2 - 4t - 5) = 0 \overset{|t| \leq \sqrt{2}}{\Leftrightarrow} t = \frac{2 - \sqrt{19}}{3} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{2 - \sqrt{19}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2 - \sqrt{19}}{3} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2 - \sqrt{19}}{3\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \alpha + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Bài 2: (ĐHNT – 98): Giải phương trình:

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x.\cos x)$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$$

Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\sin x - \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^3 x - \cos^3 x + \sin^4 x - \cos^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x - \cos 2x + (\sin x - \cos x)(1 + \sin x.\cos x) - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x - 2\cos 2x + (\sin x - \cos x)(1 + \sin x.\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[1 + 2(\sin x + \cos x) + 1 + \sin x.\cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x - \cos x = 0 & (1) \\ 2(\sin x + \cos x) + \sin x.\cos x + 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

- *Giải (1)*: Ta được tgx = 1 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k\in Z$.

- Giải (2): Đặt sinx + cosx = t điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, suy ra sinx.cosx = $\frac{t^2-1}{2}$

Khi đó (2) có dạng:

$$2t + \frac{t^2-1}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 3: (ĐHSP TP.HCM – ĐHL TP.HCM): Tìm m để phương trình:

$$2\cos 2x + (\sin x\cos x - m)(\sin x + \cos x) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

có nghiệm trong khoảng $[0, \frac{\pi}{2}]$.

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x + \cos x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x.\cos x - m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x.\cos x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (1) \\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x.\cos x = m \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos x - \sin x) + \sin x.\cos x - m = 0 \qquad (2)$$

Đặt t = cosx − sinx, vì $x\in[0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow t\in[-1,1]$

Khi đó sinx.cosx = $\frac{1-t^2}{2}$, phương trình (2) có dạng:

$$-\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{2} = m \qquad (3)$$

Vậy (1) có nghiệm trong khoảng $[0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow$ (3) có nghiệm thuộc [− 1, 1]

Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{2}$.

- Miền xác định D = [− 1, 1].
- Đạo hàm:

$$f'(t) = -t + 2,\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

- Bảng biến thiên:

t	−∞	−1		1	2	+∞
y'	▨	▨	+	▨	▨	▨
y	▨	▨	↗	▨	▨	▨

Vậy phương trình có nghiệm thuộc $[-1, 1]$ khi:

$$f(-1) \le m \le f(1) \Leftrightarrow -2 \le m \le 2.$$

Bài 4: (Đề 8): Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = k.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x . \cos x} - k = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x - k\sin x.\cos x = 0.$$

Đặt $\sin x - \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t - k.\frac{1-t^2}{2} = 0 \Leftrightarrow f(t) = kt^2 + 2t - k = 0. \qquad (2)$$

1. Với $k = 0$, ta được:

$$t = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy với $k = 0$ phương trình có một họ nghiệm.

2. Với $k \neq 0$, ta có:

$\Delta = 1 + k^2 > 0 \ \forall k$, suy ra phương trình (2) có hai nghiệm là:

$$t_1 = \frac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k}; \ t_2 = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k}$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Rightarrow$ (2) có nghiệm thoả mãn $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Phương trình (2) có 1 nghiệm thuộc $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow f(-\sqrt{2})f(\sqrt{2}) \le 0 \Leftrightarrow (k - 2\sqrt{2})(k + 2\sqrt{2}) \le 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \le k \le 2\sqrt{2}$$

Khi đó nghiệm thuộc $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ là $t_2 = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k}$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Trường hợp 2: Phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(\sqrt{2}) \ge 0 \\ af(-\sqrt{2}) \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le \dfrac{S}{2} \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + k^2 \ge 0 \\ k(k + 2\sqrt{2}) \ge 0 \\ k(k - 2\sqrt{2}) \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le -\dfrac{1}{k} \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \ge 2\sqrt{2} \\ k \le -2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $t_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + k^2}}{k}$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = \frac{-1 - \sqrt{1 + k^2}}{k} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1 - \sqrt{1 + k^2}}{k\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z$$

- Với $t_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + k^2}}{k}$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = \frac{-1 + \sqrt{1 + k^2}}{k} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1 + \sqrt{1 + k^2}}{k\sqrt{2}} = \sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \beta + 2k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - \beta + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} - \beta + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $3(\sin x + \cos x) - 4\sin x\cos x = 0$.

b. $12(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x - 12 = 0$.

c. $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$.

b. $|\sin x + \cos x| - \sin 2x = 0$.

Bài tập 3. (ĐHQG Hà Nội Khối B – 97): Giải phương trình:

$$2\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

Bài tập 4. Tìm m để phương trình:

$$3(\sin x + \cos x) = 4m\sin x.\cos x$$

có nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{4})$.

Bài tập 5. Cho phương trình:

$$(1 - \cos x)(1 - \sin x) = m$$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Bài tập 6. Cho phương trình:

$$2\sin^3x + \cos 2x + \cos x = m.$$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 7. Cho phương trình:

$$m(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x + 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -\sqrt{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

c. Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Bài tập 8. Cho phương trình:

$$m(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

c. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 9. Giải và biện luận theo k phương trình:

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = k.$$

Bài tập 10. Cho phương trình;

$$m(\sin x - \cos x) + 2\sin x\cos x = m.$$

a. Giải phương trình với $m = 1 + \sqrt{2}$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 11. Cho phương trình:

$$m + \sin^3x + \cos^3x - 3\sin x\cos x = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

c. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Bài tập 12. Xác định m đề phương trình:

$$\sin x + \cos x + 1 + \frac{1}{2}(\text{tg}x + \text{cotg}x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}) = m$$

có nghiệm $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 13. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m.$$

CHỦ ĐỀ 8

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI **tgx** VÀ **cotgx**

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Giải phương trình:

$$a(tg^2x + cotg^2x) + b(tgx + cotgx) + \; + c = 0. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Bước 2: Đặt tgx + cotgx = t, điiêu kiện $|t| \geq 2 \Rightarrow tg^2x + cotg^2x = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0 \Leftrightarrow at^2 + bt + c - 2a = 0. \qquad (2)$$

Bước 3: Giải phương trình (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t| \geq 2$

Bước 4: Với $t = t_0 \Leftrightarrow tgx + cotgx = t_0$, khi đó ta có thể lựa chọn một trong hai hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Ta có:

$$tgx + \frac{1}{tgx} = t_0 \Leftrightarrow tg^2x - t_0tgx + 1 = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai theo tgx.

Hướng 2: Ta có:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = t_0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x.\cos x} = t_0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2t_0}.$$

Đây là phương trình cơ bản của sin.

Chú ý: Cũng có thể lựa chọn phép đổi biến t = tgx, tuy nhiên khi đó ta sẽ thu được một phương trình bậc cao.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$(tgx + 7)tgx + (cotgx + 7)cotgx + 14 = 0.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(tg^2x + cotg^2x) + 7(tgx + cotgx) + 14 = 0.$$

Đặt $tgx + cotgx = t$, điều kiện $|t| \geq 2$, suy ra $tg^2x + cotg^2x = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - 2 + 7t + 14 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -4 \end{array}\right..$$

- Với $t = -3$, ta được:

$$tgx + cotgx = -3 \Leftrightarrow tgx + \frac{1}{tgx} = -3 \Leftrightarrow tg^2x + 3tgx + 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} = tg\alpha \\ tgx = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} = tg\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \beta + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

- Với $t = -4$, ta được:

$$tgx + cotgx = -4 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -4 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x.\cos x} = -4$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

Nhận xét: Qua việc lựa chọn hai phương pháp giải để tìm ra nghiệm x khi biết t_0 các em hãy lựa chọn cho mình một phương pháp phù hợp.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$tg^2x + cotg^2x + m(tgx + cotgx) + 2m = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{1}{2}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Đặt $tgx + cotgx = t$, với $|t| \geq 2$, suy ra $tg^2x + cotg^2x = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - 2 + mt + 2m = 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + mt + 2m - 2 = 0. \quad (2)$$

a. Với $m = -\frac{1}{2}$, ta được:

$$t^2 - \frac{1}{2}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3/2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{tgx} + \text{cotgx} = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{tgx} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy, với $m = -\frac{1}{2}$ phương trình có một họ nghiệm.

b. Để tìm m sao cho phương trình có nghiệm ta lựa chọn 1 trong 2 cách sau:

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ phương trình (2) có nghiệm $|t| \geq 2$.

Xét bài toán ngược: "*Tìm điều kiện để phương trình đã cho vô nghiệm*".

Phương trình đã cho vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ có hai nghiệm thuộc } (-2,2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-2) > 0 \\ af(2) > 0 \\ -2 < \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 8m - 8 < 0 \\ \begin{cases} m^2 - 8m - 8 \geq 0 \\ 2 > 0 \\ 4m + 2 > 0 \\ -2 < -\frac{m}{2} < 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 4 + 2\sqrt{2}.$$

Vậy với $m \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 4 + 2\sqrt{2}$ phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2: Vì $t = -2$ không phải là nghiệm của phương trình, nên viết lại (2) dưới dạng:

$$\frac{-t^2 + 2}{t + 2} = m$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng $y = m$ cắt phần đồ thị hàm số $y = \frac{-t^2 + 2}{t + 2}$ trên $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Xét hàm số $y = \frac{-t^2 + 2}{t + 2}$ trên $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{-t^2 - 4t - 2}{(t + 2)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 4t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		-2	▨	2		$+\infty$
y'		–	0	+	▨	▨	▨	–	
y	$+\infty$	↘	$4+2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$	▨	$-1/2$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$m \le -\frac{1}{2} \text{ hoặc } m \ge 4 + 2\sqrt{2}.$$

hú ý: Phương pháp được mở rộng tự nhiên cho các phương trình đối xứng bậc ao hơn 2.

í dụ 3: Cho phương trình:

$$2\text{tg}x + \text{tg}^2x + \text{tg}^3x + 2\text{cotg}x + \text{cotg}^2x + \text{cotg}^3x = m. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 8.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

iải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin x \ne 0\\ \cos x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Đặt tgx + cotgx = t, điều kiện |t| ≥ 2, suy ra:

$$\text{tg}^2x + \text{cotg}^2x = t^2 - 2$$

$$\text{tg}^3x + \text{cotg}^3x = (\text{tg}x + \text{cotg}x)^3 - 3\text{tg}x.\text{cotg}x.(\text{tg}x + \text{cotg}x) = t^3 - 3t.$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$2t + t^2 - 2 + t^3 - 3t = m \Leftrightarrow t^3 + t^2 - t - 2 = m. \quad (2)$$

. Với m = 8, ta được:

$$t^3 + t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \text{tg}x + \text{cotg}x = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy, với m = 10 phương trình có một họ nghiệm.

. Phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng y = m cắt phần đồ thị hàm số $= t^3 + t^2 - t - 2$ trên $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Xét hàm số $y = t^3 + t^2 - t - 2$ trên $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Đạo hàm;

$$y' = 3t^2 + 2t - 1 > 0, \forall t \in D \Leftrightarrow \text{hàm số đồng biến trên D.}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2	▨	2		$+\infty$
y'		–	▨	▨	▨	+	
	$-\infty$	↗	-4	▨	8	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là m ≤ –4 hoặc m ≥ 8.

Bài toán 2: Giải phương trình:

$$a(tg^2x + cotg^2x) + b(tgx - cotgx) + c = 0. \qquad (1)$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Bước 2: Đặt $tgx - cotgx = t \Rightarrow tg^2x + cotg^2x = t^2 + 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$a(t^2 + 2) + bt + c = 0 \Leftrightarrow at^2 + bt + c + 2a = 0. \qquad (2)$$

Bước 3: Giải phương trình (2) theo t.

Bước 4: Với $t = t_0 \Leftrightarrow tgx - cotgx = t_0$, khi đó ta có thể lựa chọn một tron hai hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Ta có:

$$tgx - \frac{1}{tgx} = t_0 \Leftrightarrow tg^2x - t_0 tgx - 1 = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai theo tgx.

Hướng 2: Ta có:

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = t_0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x.\cos x} = t_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\cos 2x}{\sin 2x} = t_0 \Leftrightarrow cotg2x = -\frac{t_0}{2}.$$

Đây là phương trình cơ bản của cotg.

Chú ý: Cũng có thể lựa chọn phép đổi biến t = tgx, tuy nhiên khi đó ta sẽ th được một phương trình bậc cao.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\,(tg^2x + cotg^2x) + 2(\sqrt{3} - 1)(tgx - cotgx) - 4 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Đặt $tgx - cotgx = t$, suy ra $tg^2x + cotg^2x = t^2 + 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}\,(t^2 + 2) + 2(\sqrt{3} - 1)t - 4 - 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\,t^2 + 2(\sqrt{3} - 1)t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 2/\sqrt{3} \end{array}\right..$$

- Với $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ta được:

$$\text{tgx} - \text{cotgx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}2x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

- Với $t = -2$, ta được:

$$\text{tgx} - \text{cotgx} = -2 \Leftrightarrow \text{tgx} - \frac{1}{\text{tgx}} = -2 \Leftrightarrow \text{tg}^2x + 2\text{tgx} - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tgx} = -1 - \sqrt{2} = \text{tg}\alpha \\ \text{tgx} = -1 + \sqrt{2} = \text{tg}\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \beta + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

hận xét: Qua việc lựa chọn hai phương pháp giải để tìm ra nghiệm x khi biết lời khuyên dành cho các em học sinh là hãy lựa chọn hướng 2 để giải, bởi gay với $t = -2$, ta được:

$$\text{tgx} - \text{cotgx} = -2 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = -2 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x.\cos x} = -2$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

hú ý: Phương pháp được mở rộng tự nhiên cho các phương trình đối xứng bậc ao hơn 2.

í dụ 5: Cho phương trình:

$$\text{tg}^3x - \text{cotg}^3x - 3(\text{tg}^2x + \text{cotg}^2x) - 3(\text{tgx} - \text{cotgx}) + m + 6 = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 4$.

b. Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$ của phương trình.

iải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Đặt $\text{tgx} - \text{cotgx} = t$, suy ra $\text{tg}^2x + \text{cotg}^2x = t^2 + 2$ và:

$$\text{tg}^3x - \text{cotg}^3x = (\text{tgx} - \text{cotgx})^3 + 3\text{tgx}.\text{cotgx}.(\text{tgx} - \text{cotgx}) = t^3 + 3t.$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^3 + 3t - 3(t^2 + 2) - 3t + m + 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + m = 0. \quad (2)$$

Với $m = 4$, ta được:

$$t^3 - 3t^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t^2 - 4t + 4) = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t - 2)^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}x-\cot gx=-1 \\ \operatorname{tg}x-\cot gx=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot g2x=\frac{1}{2}=\cot g2\alpha \\ \cot g2x=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=2\alpha+k\pi \\ 2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+\frac{k\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy với m = 4 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Với mỗi nghiệm t_0 của phương trình (2), ta được:

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x=t_0 \Leftrightarrow \operatorname{cotg}2x=-\frac{t_0}{2}.$$

Mặt khác vì $x\in(0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2x\in(0, \pi)$

Do đó với mỗi nghiệm t_0 của (2) ta có được 1 nghiệm $x_0\in(0, \frac{\pi}{2})$ của (1).

Số nghiệm của (2) bằng số giao điểm của đường thẳng $y = -m$ với đồ th hàm số $y = t^3 - 3t^2$.

Xét hàm số $y = t^3 - 3t^2$

Đạo hàm:

$$y' = 3t^2 - 6t,\ y' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 2.$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có kết luận – *Bạn đọc tự đưa ra lời kết luận*

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (Đề 13): Cho phương trình:

$$\frac{3}{\sin^2 x} + 3\operatorname{tg}^2x + m(\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x) - 1 = 0. \quad (1)$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3(1 + \operatorname{cotg}^2x) + 3\operatorname{tg}^2x + m(\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\operatorname{tg}^2x + \operatorname{cotg}^2x) + m(\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x) + 2 = 0$$

Đặt $\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x = t$, điều kiện $|t|\geq2$, suy ra $\operatorname{tg}^2x + \operatorname{cotg}^2x = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$3(t^2 - 2) + mt + 2 = 0 \Leftrightarrow f(t) = 3t^2 + mt - 4 = 0. \qquad (2)$$

Để tìm m sao cho phương trình có nghiệm ta lựa chọn 1 trong 2 cách sau:

ách 1: Ta đi xét bài toán ngược "*Tìm m để phương trình vô nghiệm*"

Phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2)\text{ vô nghiệm} \\ (2)\text{ có 2 nghiệm thuộc }(-2,2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(2) > 0 \\ af(-2) > 0 \\ -2 < S/2 < 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -4 < m < 4.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \in R\backslash(-4, 4)$.

ách 2: Viết lại (2) dưới dạng:

$$\frac{-3t^2 + 4}{t} = m$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng y = m cắt phần đồ thị hàm ố $y = \frac{-3t^2 + 4}{t}$ trên $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Xét hàm số $y = \frac{-3t^2 + 4}{t}$ trên $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{-3t^2 - 4}{t^2} < 0, \forall t \in D, \text{ do đó hàm số nghịch biến trên D.}$$

Từ đó, ta được điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} m \le y(2) \\ m \ge y(-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m \ge 4 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $|m| \ge 4$.

Bài 2: Cho phương trình:

$$tg^3x - cotg^3x - 3(tg^2x + cotg^2x) - 12(tgx - cotgx) + m + 6 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 2.

b. Tìm m để (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$ và thoả mãn:

$$\frac{\sin 2(x_1 - x_2)}{\sin 2x_1} - \frac{\sin 2(x_2 - x_3)}{\sin 2x_3} = 0.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Đặt tgx − cotgx = t, suy ra $tg^2x + cotg^2x = t^2 + 2$ và:

$$tg^3x - cotg^3x = (tgx - cotgx)^3 + 3tgx.cotgx.(tgx - cotgx) = t^3 + 3t.$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^3 + 3t - 3(t^2 + 2) - 12t + m + 6 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - 9t + m = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 2, ta được:

$$t^3 - 3t^2 - 9t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t + 2)(t^2 - 5t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx - \cot gx = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \\ tgx - \cot gx = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot g2x = -\dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2} = \cot g2\alpha_{1,2} \\ \cot g2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha_{1,2} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy với m = 2 phương trình có ba họ nghiệm.

b. Với mỗi nghiệm t_0 của phương trình (2), ta được:

$$tgx - cotgx = t_0 \Leftrightarrow cotg2x = -\frac{t_0}{2}$$

Mặt khác vì $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2x \in (0, \pi)$

Do đó với mỗi nghiệm t_0 của (2) ta có được 1 nghiệm $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ của (1).

Từ biểu thức điều kiện, ta được:

$$\frac{\sin 2(x_1 - x_2)}{\sin 2x_1} = \frac{\sin 2(x_2 - x_3)}{\sin 2x_3} \Leftrightarrow \frac{\sin 2(x_1 - x_2)}{\sin 2x_1 . \sin 2x_2} = \frac{\sin 2(x_2 - x_3)}{\sin 2x_2 \sin 2x_3}$$

$$\Leftrightarrow cotg2x_1 - cotg2x_2 = cotg2x_2 - cotg2x_3 \Leftrightarrow cotg2x_1 + cotg2x_3 = 2cotg2x_2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t_1}{2} - \frac{t_3}{2} = -2.\frac{t_2}{2} \Leftrightarrow t_1 + t_3 = 2t_2$$

⇔ (2) có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Để phương trình có ba nghiệm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng th điểm uốn U(1, −11) của đồ thị hàm số $y = t^3 - 3t^2 - 9t$ thuộc đường thẳng y = −m

$$\Leftrightarrow -m = -11 \Leftrightarrow m = 11.$$

Thử lại: với m = 11 phương trình (2) có dạng:

$$t^3 - 3t^2 - 9t + 11 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - 2t - 11) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 - 2\sqrt{3} \\ t_2 = 1 \\ t_3 = 1 + 2\sqrt{3} \end{array}\right., \text{thoả mãn.}$$

Vậy với m = 11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a. $\cot gx - tgx = \sin x - \cos x$.

b. $tgx + tg^2x + \cot gx + \cot g^2x = 6$.

Bài tập 2. Cho phương trình:

$$3(tg^2x + \cot g^2x) + 4(tgx + \cot gx) + m = 0.$$

a. (CĐHQ – 2000): Giải phương trình với $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 3. Cho phương trình:

$$tgx + tg^2x + tg^3x + \cot gx + \cot g^2x + \cot g^3x = m.$$

a. Giải phương trình với $m = 6$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 4. Cho phương trình:

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \cot g^2x + m(tgx + \cot gx) + 2 = 0.$$

a. Giải phương trình khi $m = \frac{5}{2}$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 5. Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây có nghiêm:

$$\frac{3}{\sin^2 x} + tg^3x + m(tgx + \cot gx) - 1 = 0.$$

Bài tập 6. Giải và biện luận phương trình:

$$(m-2)(tg^2x + \cot g^2x) - 2m(tgx - \cot gx) - m + 5 = 0.$$

CHỦ ĐỀ 9

LOẠI NGHIỆM KHÔNG THÍCH HỢP

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Loại nghiệm không thích hợp của phương trình lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường gặp 2 dạng toán sau:

Dạng 1: Tìm nghiệm thuộc (a, b) của phương trình.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Giải phương trình để tìm nghiệm $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, k, n∈Z.

Bước 3: Tìm nghiệm thuộc (a, b):

$$a < \alpha + \frac{2k\pi}{n} < b \overset{k,n\in Z}{\Leftrightarrow} (k_0, l_0) \Rightarrow x_0 = \alpha + \frac{2k_0\pi}{n_0}.$$

Dạng 2: Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình $x \neq \beta + \frac{2l\pi}{n}$, l, n∈Z

Bước 2: Giải phương trình để tìm nghiệm $x_0 = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, k, n∈Z.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp đại số:

- Nghiệm x_0 bị loại khi và chỉ khi:

$$\alpha + \frac{2k\pi}{n} = \beta + \frac{2l\pi}{n}.$$

- Nghiệm x_0 chấp nhận được khi và chỉ khi:

$$\alpha + \frac{2k\pi}{n} \neq \beta + \frac{2l\pi}{n}.$$

Phương pháp hình học:

- Biểu diễn các điểm $x = \beta + \frac{2l\pi}{n}$, l, n∈Z trên đường tròn đơn vị, khi đó ta được tập các điểm $C = \{C_1,..., C_p\}$.
- Biểu diễn các điểm $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, k, n∈Z. trên đường tròn đơn vị, khi đó ta được tập các điểm $D = \{D_1,..., D_q\}$.
- Lấy tập $E = D\backslash C = \{E_1,...,E_r\}$, từ đó kết luận nghiệm của phương trình là:

$$x = E_1 + 2k\pi,... x = E_r + 2k\pi, k\in Z.$$

Ví dụ 1: (Đề 16): Tìm các nghiệm thuộc ($\frac{\pi}{2}$, 3π) của phương trình:

$$\sin(2x + \frac{5\pi}{2}) - 3\cos(x - \frac{7\pi}{2}) = 1 + 2\sin x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2} + 2\pi) - 3\cos(x + \frac{\pi}{2} - 4\pi) = 1 + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \overset{x\in(\frac{\pi}{2},3\pi)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \pi,\ x = 2\pi \\ x = \frac{13\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6},\ x = \frac{17\pi}{6} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 5 nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐH Việt Nam Khối D – 2002) Tìm các nghiệm thuộc $[0, 2\pi]$ của phương trình :

$$5(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}) = \cos 2x + 3.$$

Giải

Điều kiện:

$$1 + 2\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \neq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x \neq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x \neq \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \cos 3x + \sin 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x \\ &= 4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x) \\ &= (\cos x - \sin x)[4(1 + \cos x.\sin x) - 3] = (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x) \end{aligned}$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$5(\sin x + \cos x - \sin x) = \cos 2x + 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 2\ (l) \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in Z \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Ví dụ 3: (ĐHKT – 99): Giải phương trình:

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin x.\cos 2x + 2\cos 2x = 2 \Leftrightarrow 2\sin x.\cos 2x = 1 - \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos 2x = 2\sin^2 x \Leftrightarrow (\cos 2x - \sin x)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x - \sin x)\sin x = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1)\sin x = 0$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét: Trong lời giải trên chúng ta đã linh hoạt trong việc kiểm tra điều kiện (*) để loại đi các nghiệm sinx = 0 và sinx = –1, bởi:

$$\sin 4x = 4\sin x.\cos x.\cos 2x.$$

Ví dụ 4: (ĐH Huế Khối A – 99): Giải phương trình:

$$\frac{\sin x.\cot g5x}{\cos 9x} = 1.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin 5x \neq 0 \\ \cos 9x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \neq l\pi \\ 9x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{l\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{l\pi}{9} \end{cases}, l \in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 5x.\sin x = \cos 9x.\sin 5x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 4x) = \frac{1}{2}(\sin 14x - \sin 4x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 14x = \sin 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 14x = 6x + 2k\pi \\ 14x = \pi - 6x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \end{array}\right., k \in Z.$$

Kiểm tra điều kiện (*):

- Với $x = \dfrac{k\pi}{4}$, ta cần có:

$$\begin{cases} \dfrac{k\pi}{4} \neq \dfrac{l\pi}{5} \\ \dfrac{k\pi}{4} \neq \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{l\pi}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5k \neq 4l \\ 9k \neq 2 + 4l \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 4n + 1 \\ k = 4n + 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{(4n+1)\pi}{4} \\ x = \dfrac{(4n+3)\pi}{4} \end{array}\right., n \in Z.$$

- Với $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}$, ta cần có:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10} \neq \dfrac{l\pi}{5} \\ \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10} \neq \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{l\pi}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2k \neq 4l \\ 18k \neq 1 + 20l \end{cases} \text{ luôn đúng} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Nhận xét: Trong lời giải trên từ

$$\begin{cases} 5k \neq 4l & (1) \\ 9k \neq 2 + 4l & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 4n + 1 \\ k = 4n + 3 \end{array}\right.$$

bởi từ (1) suy ra k không chia hết cho 4 và từ (2) suy ra k lẻ, do đó:

$$\left[\begin{array}{l} k = 4n + 1 \\ k = 4n + 3 \end{array}\right. \qquad (I)$$

rồi lại thực hiện phép thử (I) và (2).

Còn đối với

$$\begin{cases} 1 + 2k \neq 4l \\ 18k \neq 1 + 20l \end{cases} \text{ luôn đúng}$$

xuất phát từ tính chẵn lẻ của hai vế.

Ví dụ 5: (ĐHQG Hà Nội – 2001): Giải phương trình:

$$\sin 3x = \cos x.\cos 2x.(tg^2 x + tg2x).$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 3x = \cos x.\cos 2x.\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{\sin^2 x.\cos 2x}{\cos x} + \sin 2x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (3\sin x - 4\sin^3 x).\cos x = (\cos 2x.\sin x + 2\cos^3 x)\sin x$$

$$\Leftrightarrow [(3-4\sin^2x).\cos x-(\cos2x.\sin x+2\cos^3x)]\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\cos2x.\sin x=0\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (ĐH Việt Nam Khối D – 2002): Tìm x thuộc đoạn [0, 14] là nghiệm đúng nghiệm phương trình:

$$\cos3x-4\cos2x+3\cos x-4=0.$$

BÀI GIẢI

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos^3x-3\cos x-4(\cos2x+1)+3\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3x-8\cos^2x=0\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vì $x\in[0, 14]$ nên:

$$0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le14\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le k\le\frac{14-\frac{\pi}{2}}{\pi}\Leftrightarrow k=0, 1, 2, 3.$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{2}$, $x=\frac{7\pi}{2}$.

Bài 2: (ĐHKTQD TPHCM – 90): Giải phương trình:

$$\frac{\cos2x+3\cot g2x+\sin4x}{\cot g2x-\cos2x}=2.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin2x\ne0\\ \cot g2x-\cos2x\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin2x\ne0\\ (\frac{1}{\sin2x}-1)\cos2x\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin2x\ne0\\ \cos2x\ne0\\ \sin2x\ne1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin4x\ne0\Leftrightarrow x\ne\frac{k\pi}{4},\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos2x+3.\frac{\cos2x}{\sin2x}+2\sin2x.\cos2x=2(\frac{\cos2x}{\sin2x}-\cos2x)$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{3}{\sin2x}+2\sin2x=2(\frac{1}{\sin2x}-1)\Leftrightarrow 2\sin^22x+3\sin2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin2x=-1\ (\text{loại})\\ \sin2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ 2x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Bài 3: (ĐHKT – 96): Giải phương trình:

$$\frac{(1-\cos x)^2+(1+\cos x)^2}{4(1-\sin x)}-\text{tg}^2x.\sin x=\frac{1+\sin x}{2}+\text{tg}^2x.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin x\neq 1\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2+2\cos^2 x}{4(1-\sin x)}=\frac{1+\sin x}{2}+(1+\sin x)\text{tg}^2x$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{1+\cos^2 x}{2(1-\sin x)}=\frac{1+\sin x}{2}(1+2\text{tg}^2x)=\frac{1+\sin x}{2}\,\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1+\sin x}{2}\,\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{2(1-\sin x)}$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos^2x=\cos^2x+2\sin^2x\Leftrightarrow 1-2\sin^2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$

Bài 4: (ĐHQG – 96): Giải phương trình:

$$3\sin^2x+\frac{1}{2}\sin 2x+2\cos^2x=\frac{3(\sin^4 x+\cos^4 x-1)}{\sin^6 x+\cos^6 x-1}.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\sin^4x+\cos^4x-1=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x.\cos^2x-1=-2\sin^2x.\cos^2x.$$

$$\sin^6x+\cos^6x-1=(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^2x.\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)-1$$
$$=-3\sin^2x.\cos^2x.$$

Điều kiện:

$$\sin^6x+\cos^6x-1\neq 0\Leftrightarrow -3\sin^2x.\cos^2x\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.\quad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin^2x+\frac{1}{2}\sin 2x+2\cos^2x=2\Leftrightarrow \sin^2x+\sin x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin x+\cos x)=0\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z.$

Bài 5: (ĐHXD – 97): Giải phương trình:

$$\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{tg(\frac{\pi}{4} - x)tg(\frac{\pi}{4} + x)} = \cos^4 2x.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$tg(\frac{\pi}{4} - x)\,tg(\frac{\pi}{4} + x) = tg(\frac{\pi}{4} - x)\,cotg(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - x) = tg(\frac{\pi}{4} - x)\,cotg(\frac{\pi}{4} - x) = 1.$$

Điều kiện

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4} - x) \neq 0 \\ \cos(\frac{\pi}{4} + x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{4} + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^4 2x \Leftrightarrow \sin^4 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

Bài 6: (ĐHMĐC – 97): Giải phương trình:

$$\frac{\sin 5x}{5\sin x} = 1.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in Z.$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 5x = 5\sin x \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x = 4\sin x \Leftrightarrow 2\cos 3x.\sin 2x = 4\sin x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 3x.\sin x.\cos x = 4\sin x \Leftrightarrow (\cos 3x.\cos x - 1)\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x.\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \text{ vi phạm điều kiện vì } \sin x \neq 0.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài 7: (ĐHNN – 98): Giải phương trình:

$$\frac{\cos x - 2\sin x.\cos x}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$2\cos^2 x - \sin x - 1 = -2\sin^2 x - \sin x + 1 = (\sin x + 1)(1 - 2\sin x).$$

Điều kiện:

$$2\cos^2 x + \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)(1 - 2\sin x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\cos x(1 - 2\sin x)}{(\sin x + 1)(1 - 2\sin x)} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{3}\sin x + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ (loại)} \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 8: (ĐHL – 98). Giải phương trình :

$$\text{tg}x - \sin 2x - \cos 2x + 2(2\cos x - \frac{1}{\cos x}) = 0.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x.\cos x - \cos 2x + 2(\frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\frac{1}{\cos x} - 2\cos x) - \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x.\frac{\cos 2x}{\cos x} - \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\cos x}(-\sin x - \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x + \sin x = 2 \text{ (vn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 9: (ĐHSP Vinh – 98): Giải phương trình:

$$1 + \text{cotg}2x = \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1-\cos 2x}{1-\cos^2 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{1+\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \sin 2x)(1 + \cos 2x) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x + (\cos 2x + \sin 2x)\cos 2x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \sin 2x + 1)\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sqrt{2}\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. (ĐHY Hà Nội – 95): $6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$.

b. (ĐHBK Hà Nội – 2000): $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\text{tg}x + \text{cotg}x)$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. (Đề 90): $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$.

b. (Đề 99): $\frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x.\cos x - 1} = 1$.

c. (ĐHTM – 99): $2(\sin 3x - \cos 3x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

d. (Đề 121): $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$.

e. (ĐHQG – 97): $2\sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

f. (ĐHBK Hà Nội – 98): $\dfrac{1}{\mathrm{tg}x + \cot g2x} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot gx - 1}$.

g. (ĐHGTVT TPHCM – 98): $\dfrac{\cot g^2 x - \mathrm{tg}^2 x}{\cos 2x} = 16(1 + \cos 4x)$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{7}{8}\mathrm{cotg}(x + \dfrac{\pi}{3}).\mathrm{cotg}(\dfrac{\pi}{6} - x)$.

b. $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$.

b. $\sin^2 x - \sin x + \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin x} = 0$.

Bài tập 5. Tìm các nghiệm của phương trình:

$$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 1 - \sin x$$

thoả mãn điều kiện $\left|\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right| \le \dfrac{3\pi}{4}$.

Bài tập 6. Tìm các nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0$$

thoả mãn điều kiện $|x| < 2$.

Bài tập 7. Tìm các nghiệm của phương trình:

$$\frac{3\pi}{4}\sin(2x + \frac{5\pi}{2}) - 3\cos(x - \frac{7\pi}{2}) = 1 + 2\sin x$$

thoả mãn điều kiện $x \in (\dfrac{\pi}{2}, 3\pi)$.

Bài tập 8. Tìm tổng các nghiệm thoả mãn $1 \le x \le \pi$ của phương trình:

$$\cos 2x - \mathrm{tg}^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}.$$

CHỦ ĐỀ 10

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC HỖN HỢP CHỨA CÁC BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG VỚI $\sin^{2n}x$ VÀ $\cos^{2n}x$

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Thực hiện việc khử biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$ dự trên 2 hằng đẳng thức:

1. Với $n = 2k$, $k \in N^+$ ta sử dụng:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \text{ và } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

khi đó:

$$\begin{aligned}\sin^4x + \cos^4x &= (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x\\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x\\ &= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos4x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cos4x.\end{aligned}$$

$$\sin^4x - \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)(\sin^2x - \cos^2x) = -\cos2x.$$

2. Với $n = 3k$, $k \in N^+$ ta sử dụng:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

khi đó:

$$\begin{aligned}\sin^6x + \cos^6x &= (\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3(\sin^2x + \cos^2x)\sin^2x.\cos^2x\\ &= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2\\ &= 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos4x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^6x - \cos^6x &= (\sin^2x - \cos^2x)^3 + 3(\sin^2x - \cos^2x)\sin^2x.\cos^2x\\ &= -\cos^3 2x - \frac{3}{4}\sin^2 2x.\cos2x\\ &= -\cos^3 2x - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2x)\cos2x\\ &= -\frac{1}{4}\cos^3 2x - \frac{3}{4}\cos2x.\end{aligned}$$

Ví dụ 1: (ĐHTS – 97): Giải phương trình:

$$\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \sin 2x.$$

Giải

Ta có:

$$\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = (\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2})(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) = \cos x.$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2\sin x.\cos x \Leftrightarrow (1 - 2\sin x).\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐH Huế – 2001): Cho phương trình:

$$\sin^4x + \cos^4x = m.\sin 2x - \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Chứng minh rằng với mọi m thoả mãn $|m| \geq 1$ phương trình luôn có nghiệm.

Giải

Ta có:

$$\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = m.\sin 2x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2x + 2m.\sin 2x - 3 = 0$$

Đặt $t = \sin 2x$, điều kiện $|t| \leq 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + 2mt - 3 = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \text{ (loại)} \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k\in Z$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Nhận xét rằng:

$$f(-1).f(1) = (1 + 2m - 3)(1 - 2m - 3) = -4(m - 1) \leq 0 \text{ với } |m| \geq 1$$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có nghiệm thuộc $[-1, 1]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$\sin^6x + \cos^6x = m\sin^2 2x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{1}{4}$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Giải

Ta có:

$$\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3(\sin^2x + \cos^2x)\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = m.\sin^2 2x \Leftrightarrow (4m + 3)\sin^2 2x = 4.$$

Đặt $t = \sin 2x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(4m + 3)t^2 = 4. \qquad (2)$$

a. Với $m = \frac{1}{4}$, ta được:

$$4t^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Với $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow 2x \in [-\pi, \pi]$.

Để phương trình (1) có đúng 4 nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn: $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 3 \ne 0 \\ \left|\frac{4}{4m+3}\right| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -\frac{3}{4} \\ |4m + 3| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -\frac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} 4m + 3 > 4 \\ 4m + 3 < -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{1}{4} \\ m < -\frac{7}{4} \end{array}\right..$$

Vậy với $m \in (-\infty, -\frac{7}{4}) \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: (HVKTMM – 99): Giải phương trình:

$$\sin^8x + \cos^8x = \frac{17}{32}.$$

Giải

Ta có:

$$\sin^8x + \cos^8x = (\sin^4x + \cos^4x)^2 - 2\sin^4x\cos^4x$$

$$= [(\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$= (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = \frac{1}{8}\sin^4 2x - \sin^2 2x + 1$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{8}\sin^4 2x - \sin^2 2x + 1 = \frac{17}{32} \Leftrightarrow 4\sin^4 2x - 32\sin^2 2x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \\ \sin^2 2x = \frac{15}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos4x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý: Nếu bài toán chứa hai biểu thức đối xứng $\sin^kx + \cos^kx$ và $\sin^{k+2}x + \cos^{k+2}x$ có hệ số đối xứng, ta nên sử dụng phép biến đổi:

$$A(\sin^kx + \cos^kx) - A(\sin^{k+2}x + \cos^{k+2}x) =$$

$$= A(1 - \sin^2x)\sin^kx + A(1 - \cos^2x)\cos^kx$$

$$= A\cos^2x.\sin^kx + A\sin^2x.\cos^kx$$

$$= A\cos^2x.\sin^2x.\sin^{k-2}x + A\sin^2x.\cos^2x.\cos^{k-2}x$$

$$= \frac{A}{4}(\sin^{k-2}x + \cos^{k-2}x).\sin^2 2x.$$

Ví dụ 5: Cho phương trình:

$$2(\sin^4x + \cos^4x) - 2(\sin^6x + \cos^6x) = m\sin2x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

Giải

Ta có:

$$VT = 2(\sin^4x + \cos^4x) - 2(\sin^6x + \cos^6x) = 2(1 - \sin^xx)\sin^4x + 2(1 - \cos^xx)\cos^4x$$

$$= 2\cos^xx.\sin^2x.\sin^2x + 2\sin^xx.\cos^2x.\cos^2x$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^2x + \cos^2x).\sin^2 2x = \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{2}\sin^2 2x = m\sin2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin2x = 0 & (2) \\ \sin2x = 2m & (3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ \sin2x = 2m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ \sin2x = 2m \end{array}\right.$$

Như vậy với mọi m phương trình luôn có một họ nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

a. Với m = 1, (3) vô nghiệm do đó phương trình chỉ có 1 họ nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}$.

b. Theo biến đổi trên ta luôn có $x = \frac{k\pi}{2} \overset{x\in[0,\pi]}{\Rightarrow} x = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ – ba nghiệm.

Vậy điều kiện đầu bài là:

$$\left[\begin{array}{l}(3)\text{ vô nghiệm}\\ (3)\Leftrightarrow(2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|2m|>1\\ 2m=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|m|>\frac{1}{2}\\ 2m=0\end{array}\right..$$

Chú ý: Nếu bài toán chứa hai biểu thức đối xứng $A(\sin^k x + \cos^k x)$ và $B(\sin^{k+2}x + \cos^{k+2}x)$ có $-B = 2A$, ta nên sử dụng phép biến đổi:

$$A(\sin^k x + \cos^k x) - 2A(\sin^{k+2}x + \cos^{k+2}x)$$
$$= A(1 - 2\sin^2 x)\sin^k x + A(1 - 2\cos^2 x)\cos^k x$$
$$= A\cos 2x.\sin^k x - A\cos 2x.\cos^k x = A(\sin^k x - \cos^k x).\cos 2x.$$

Ví dụ 6: (HVKTQS – 99): Giải phương trình:

$$2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(2\sin^2 x - 1)\sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x + \cos 2x$$
$$\Leftrightarrow -\cos 2x.\sin x = \cos 2x.\cos x + \cos 2x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x + 1)\cos 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = -1\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos 2x = 0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x+\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}+2k\pi\\ 2x = \frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x = \pi+2k\pi\\ x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 7: Cho phương trình:

$$\sin^8 x + \cos^8 x - 2(\sin^{10}x + \cos^{10}x) = m\cos 2x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{7}{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

iải

Ta có:

$$\begin{aligned}VT &= (1-2\sin^2x)\sin^8x + (1-2\cos^2x)\cos^8x\\ &= \cos2x.\sin^8x - \cos2x.\cos^8x = (\sin^8x - \cos^8x).\cos2x\\ &= (\sin^4x - \cos^4x)(\sin^4x + \cos^4x).\cos2x\\ &= (\sin^2x - \cos^2x)(\sin^2x + \cos^2x)[(\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x].\cos2x\\ &= -(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x).\cos^2 2x = -[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x)].\cos^2 2x\\ &= -\frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x).\cos^2 2x.\end{aligned}$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$-\frac{1}{2}(1+\cos^2 2x).\cos^2 2x = m\cos2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos 2x = 0 & (2)\\ \cos^3 2x + \cos 2x + 2m = 0 & (3)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Như vậy với mọi m phương trình luôn có một họ nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Giải (2): Đặt t = cos2x, điều kiện $|t|\le 1$, ta được:

$$t^3 + t = -2m. \qquad (4)$$

Với $m = \frac{7}{3}$, ta được:

$t^3 + t = -\frac{14}{3}$, phương trình này vô nghiệm bởi $VT \ge -2$.

. Để phương trình có nghiệm $x \ne \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = -2m$ cắt phần đồ thị hàm số $y = t^3 + t$ lấy trên miền $D = [-1, 1]\backslash\{0\}$.

Xét hàm số $y = t^3 + t$ lấy trên miền $D = [-1, 1]\backslash\{0\}$.

Đạo hàm:

$y' = 3t^2 + 1 > 0, \forall t\in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến.

Do đó điều kiện là:

$$\begin{cases}f(-1) \le -2m \le f(1)\\ -2m \ne f(0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 \le -2m \le 2\\ -2m \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 \le m \le 1\\ m \ne 0\end{cases}.$$

Vậy với $m\in[-1, 1]\backslash\{0\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

í du 8: (ĐHBK Hà Nội – 99): Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, tìm $x\in(0, \frac{\pi}{2})$ ıoả mãn phương trình:

$$\sin^n x + \cos^n x = 2^{\frac{2-n}{2}}.$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = \sin^n x + \cos^n x$.

Miền xác định $D = (0, \frac{\pi}{2})$.

Đạo hàm:

$$y' = n\cos x\sin^{n-1}x - n\sin x\cos^{n-1}x = n\sin x.\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin x.\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

Bảng biến thiên

x	0		π/4		π/2
y'		−	0	+	
y	1	↘	$2^{\frac{2-n}{2}}$	↗	1

Từ bảng biến thiên, suy ra: $\sin^n x + \cos^n x = 2^{\frac{2-n}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (ĐHXD – 97): Giải phương trình:

$$\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{tg(\frac{\pi}{4} - x).tg(\frac{\pi}{4} + x)} = \cos^4 4x.$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$tg(\frac{\pi}{4} - x).tg(\frac{\pi}{4} + x) = tg(\frac{\pi}{4} - x).cotg(\frac{\pi}{4} - x) = 1.$$

Do đó điều kiện có nghĩa của phương trình là:

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4} - x) \neq 0 \\ \cos(\frac{\pi}{4} + x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{4} + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} - k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x.\cos^2 2x = \cos^4 4x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x = \cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 4x) = \cos^4 4x \Leftrightarrow 2\cos^4 4x - \cos^2 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 2x = 1 \\ \cos^2 2x = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Bài 2: (HVBCVT TPHCM – 2001): Cho phương trình:

$$\sin^6x + \cos^6x = m.\sin2x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3(\sin^2x + \cos^2x)\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^22x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$1 - \frac{3}{4}\sin^22x = m.\sin2x \Leftrightarrow 3\sin^22x + 4m\sin2x - 4 = 0.$$

Đặt $t = \sin2x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$3t^2 + 4mt - 4 = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{ loại} \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin2x = \frac{2}{3} = \sin2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 2\alpha + 2k\pi \\ 2x = \pi - 2\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} - \alpha + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thuộc [– 1, 1]

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có 1 nghiệm thuộc}[-1, 1] \\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc}[-1, 1] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(1) \le 0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(-1) \ge 0 \\ af(1) \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{S}{2} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (4m - 1)(-4m - 1) \le 0 \\ \begin{cases} 4m^2 + 12 \ge 0 \\ 4m - 1 \ge 0 \\ -4m - 1 \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{2m}{3} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow |m| \ge \frac{1}{4}.$$

Vậy với $|m| \ge \dfrac{1}{4}$ phương trình có nghiệm.

Cách 2: Vì t = 0 không phải là nghiệm của (2) nên phương trình được viết lại:

$$\frac{4 - 3t^2}{t} = 4m.$$

Phương trình (1) có nghiệm ⇔ đường thẳng $y = 4m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{4 - 3t^2}{t}$

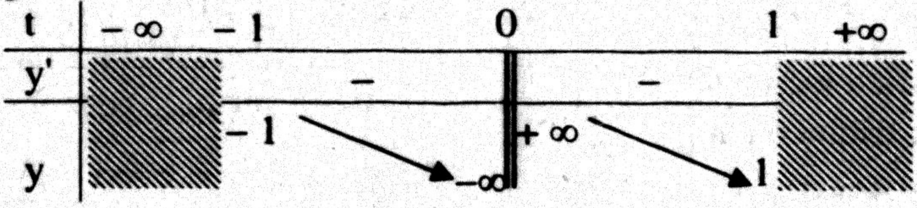
ên đoạn $[-1, 1]$.

Xét hàm số $y = \frac{4 - 3t^2}{t}$ trên đoạn $[-1, 1]$.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{-4 - 3t^2}{t^2} < 0 \Rightarrow$$ hàm số nghịch biến trên $[-1, 1]$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} 4m \le -1 \\ 4m \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow |m| \ge \frac{1}{4}.$$

Vậy với $|m| \ge \frac{1}{4}$ phương trình có nghiệm.

Bài 3: (ĐHQG TPHCM − 97): Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$4(\sin^4x + \cos^4x) - 4(\sin^6x + \cos^6x) - \sin^2 4x = m. \qquad (1)$$

BÀI GIẢI

Ta có:

$$\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3(\sin^2x + \cos^2x)\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x.\cos^2 2x = 4\sin^2 2x.(1 - \sin^2 2x) = 4\sin^2 2x. - 4\sin^4 2x$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$4(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) - 4(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x) - (4\sin^2 2x - 4\sin^4 2x) = m$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^4 2x - 3\sin^2 2x = m$$

Đặt $t = \sin^2 2x$, điều kiện $0 \le t \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$4t^2 - 3t = m. \qquad (2)$$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

ách 1: Phương trình (1) có nghiệm ⇔ (2) có nghiệm thuộc $[0, 1]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có 1 nghiệm thuộc } [0,1] \\ \text{(2) có 2 nghiệm thuộc } [0,1] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0).f(1) \le 0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(0) \ge 0 \\ af(1) \ge 0 \\ 0 \le \frac{S}{2} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m(1-m) \le 0 \\ \begin{cases} 9+16m \ge 0 \\ -m \ge 0 \\ 1-m \ge 0 \\ 0 \le \frac{3}{8} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le m \le 1 \\ -\frac{9}{16} \le m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{9}{16} \le m \le 1.$$

Vậy với $-\frac{9}{16} \le m \le 1$ phương trình có nghiệm.

ách 2: Phương trình (1) có nghiệm

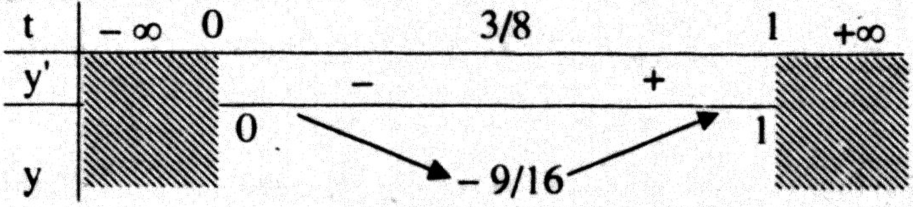
$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 4t^2 - 3t$ trên đoạn $[0, 1]$.

Xét hàm số $y = 4t^2 - 3t$ trên đoạn $[0, 1]$.

Đạo hàm:

$$y' = 8t - 3,\ y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{8}.$$

Bảng biến thiên:


t
$-\infty$
0
3/8
1
$+\infty$
y'
–
+
y
0
– 9/16
1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là: $-\frac{9}{16} \le m \le 1$

Vậy với $-\frac{9}{16} \le m \le 1$ phương trình có nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

ài tập 1. Giải phương trình:

a. $4(\sin^4x + \cos^4x) + \sqrt{3}\sin4x = 2$.

b. (ĐHCĐ Hà Nội – 2001): $\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2} = 1 - 2\sin x$.

c. (ĐHGT Hà Nội – 99): $\sin^4x + \cos^4x = \frac{7}{8}\cot g(x + \frac{\pi}{3}).\cot g(\frac{\pi}{6} - x)$.

ài tập 2. Giải phương trình:

a. (HVNH – 98): $\sin^6x + \cos^6x = \cos4x$.

b. (ĐH Huế – 99): $\sin^6x + \cos^6x = \frac{7}{16}$.

c. (HVQY – 97): $\sin^8x + \cos^8x = \frac{1}{8}$.

ài tập 3. Giải phương trình:

a. (ĐHNT Hà Nội – 2000): $\sin^8x + \cos^8x = 2(\sin^{10}x + \cos^{10}x) + \frac{5}{4}\cos2x$.

b. (ĐHQG Hà Nội – 98): $\sin^3x + \cos^3x = 2(\sin^5x + \cos^5x)$.

CHỦ ĐỀ 11

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC HỖN HỢP CHỨA CÁC BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG VỚI TANx VÀ COTx

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với tg và cotg.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Chuyển phương trình về sin và cos để giải.

Thông thường ở bước này ta thường sử dụng các công thức biến đổi sau:

1. $\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 1. $\text{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

2. $\text{tg}x \pm \text{tg}y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x.\cos y}$ 2. $\text{cotg}x \pm \text{cotg}y = -\dfrac{\sin(x \pm y)}{\sin x.\sin y}$

3. $\text{tg}(x \pm y) = \dfrac{\text{tg}x \pm \text{tg}y}{1 \mp \text{tg}x.\text{tg}y}$ 3. $\text{cotg}(x \pm y) = \dfrac{\cot gx.\cot gy \mp 1}{\cot gx \pm \cot gy}$

ngoài ra còn có:

$$\text{tg}x + \text{cotg}x = \frac{2}{\sin 2x} \quad \& \quad \text{tg}x - \text{cotg}x = -2\text{cotg}2x.$$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\text{cotg}x - \text{tg}x = 2\text{tg}2x.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\text{cotg}2x = 2\text{tg}2x \Leftrightarrow \text{cotg}2x = \text{tg}2x \Leftrightarrow \text{cotg}2x = \text{cotg}(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$m(\text{tg}x + \text{cotg}x) = 2(2 + \sin 2x). \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 3.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \pi)$.

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2m}{\sin 2x} = 2(2 + \sin 2x) \Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x - m = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x$, điều kiện $|t| \leq 1$. Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 + 2t - m = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 3, ta được:

$$t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy với m = 3 phương trình có một họ nghiệm.

b. Với $x \in (0, \pi) \Leftrightarrow 2x \in (0, 2\pi)$

do đó để phương trình (1) có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \pi)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có nghiệm } -1 = t_1 < t_2 < 1 \\ (2) \text{ có nghiệm } -1 < t_1 < t_2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(-1) = 0 \\ \Delta' > 0 \\ af(1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(1) = 0 \\ \Delta' > 0 \\ af(-1) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 - m = 0 \\ 1 + m > 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - m = 0 \\ 1 + m > 0 \\ -1 - m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \pi)$.

Chú ý: Với các phương trình mà sự hiện diện của tg và cotg không đối xứng, khi đó ta cần linh hoạt biến đổi dựa trên phương pháp luận về hệ số cho phép tách. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: (Đề 97): Giải phương trình:

$$6\text{tg}x + 5\text{cotg}3x = \text{tg}2x.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x \neq k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$5(\text{tgx} + \text{cotg}3x) = \text{tg}2x - \text{tgx}$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin x}{\cos 2x.\cos x} \Leftrightarrow \frac{5\cos 2x}{\cos x.\sin 3x} = \frac{\sin x}{\cos 2x.\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 2x = \sin 3x.\sin x \Leftrightarrow 5\cos^2 2x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

$$\Leftrightarrow 10\cos^2 2x = \cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) \Leftrightarrow 12\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{1}{3} = \cos 2\alpha \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{4} = \cos 2\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pm 2\alpha + 2k\pi \\ 2x = \pm 2\beta + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\alpha + k\pi \\ x = \pm\beta + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm

Chú ý: Nhiều bài toán đòi hỏi các em học sinh ngoài việc sử dụng phương pháp luận về hệ số còn phải thật linh hoạt trong phép biến đổi toàn cục hoặc cục bộ để chuyển đổi phương trình ban đầu về dạng đơn giản hơn, cụ thể ta đi xem xé ví dụ sau:

Ví dụ 4: (ĐHQG Hà Nội – 98): Giải phương trình:

$$2\text{tgx} + \text{cotg}2x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\text{tgx} + (\text{tgx} + \text{cotg}2x) = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow \text{tgx} + \frac{\cos x}{\sin 2x.\cos x} = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 4\sin x.\cos x \Leftrightarrow 4\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2(1 + \cos 2x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$3\text{tg}2x - 4\text{tg}3x = \text{tg}^2 3x.\text{tg}2x.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{cases}, k \in Z. \qquad \text{(I)}$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3(\text{tg}2x - \text{tg}3x) = \text{tg}3x + \text{tg}^2 3x.\text{tg}2x$$

$$\Leftrightarrow 3(\text{tg}2x - \text{tg}3x) = (1 + \text{tg}3x.\text{tg}2x)\text{tg}3x. \qquad (*)$$

Nếu $1 + \text{tg}3x.\text{tg}2x = 0$ thì (*) tương đương với

$$\begin{cases} 1 + \text{tg}3x.\text{tg}2x = 0 \\ \text{tg}2x - \text{tg}3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \text{tg}^2 3x = 0 \\ \text{tg}2x = \text{tg}3x \end{cases} \text{ vô nghiệm} \Rightarrow 1 + \text{tg}3x.\text{tg}2x \neq 0$$

do đó:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3(\text{tg}2x - \text{tg}3x)}{1 + \text{tg}3x.\text{tg}2x} = \text{tg}3x \Leftrightarrow -3\text{tg}x = \frac{3\text{tg}x - \text{tg}^3 x}{1 - 3\text{tg}^2 x} \Leftrightarrow 5\text{tg}^3 x - 3\text{tg}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = 0 \\ \text{tg}^2 x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = 0 \\ \text{tg}x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{5} = \text{tg}(\pm\alpha) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\alpha + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Trong lời giải trên để làm xuất hiện công thức $\dfrac{\text{tg}2x - \text{tg}3x}{1 + \text{tg}3x.\text{tg}2x}$ ta đã phải xét hai trường hợp $1 + \text{tg}3x.\text{tg}2x = 0$ và $1 + \text{tg}3x.\text{tg}2x \neq 0$, kiểu biến đổi này trong nhiều bài toán sẽ rất cồng kềnh, do vậy để tránh trường hợp mất nghiệm các em học sinh nên quy phương trình về sin, cos để biến đổi, cụ thể:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3\sin(2x - 3x)}{\cos 2x.\cos 3x} = (1 + \frac{\sin 3x}{\cos 3x}.\frac{\sin 2x}{\cos 2x})\text{tg}3x$$

$$\Leftrightarrow -3\sin x = (\cos 3x.\cos 2x + \sin 3x.\sin 2x).\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$\Leftrightarrow -3\cos 3x.\sin x = \cos x.\sin 3x \Leftrightarrow -\frac{3}{2}(\sin 4x - \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 2\sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x = 2\sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x = 4\sin 2x.\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ 1 = 4\cos 2x \end{array}\right. \overset{(I)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{4} = \cos 2\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\alpha + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Chú ý: Như chúng ta đã thấy trong các ví dụ trên, công việc trước tiên luôn là đặt điều kiện để phương trình có nghĩa, tuy nhiên đối với một số phương trình phân thức các em học sinh nên có thói quen biến đổi mẫu số trước khi thiết lập điều kiện có nghĩa cho phương trình. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 6: (ĐHBK Hà Nội – 98): Giải phương trình:

$$\frac{1}{\text{tg}x + \cot g2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot gx - 1}.$$

Giải

Ta có: $\text{tgx} + \text{cotg}2x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\cos x}{\sin 2x.\cos x} = \dfrac{1}{\sin 2x}$

$$\text{cotgx} - 1 = \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x}.$$

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\\ \cot gx - 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \cot gx \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x \neq k\pi\\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{cases}. \quad \text{(I)}$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x = \sqrt{2}\,\text{sinx} \Leftrightarrow 2\text{sinx.cosx} = \sqrt{2}\,\text{sinx} \overset{\text{(I)}}{\Leftrightarrow} \text{cosx} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{\text{(I)}}{\Leftrightarrow} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý: Như chúng ta đã thấy với các phương trình có chứa tg, cotg và sin, cos ta thường biến đổi:

$$\text{tgx} = \frac{\sin x}{\cos x} \;\&\; \text{cotgx} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Ví dụ 7: (ĐHQG Hà Nội – 95): Giải phương trình:

$$(1 - \sin^3 x)\text{tg}^2 x + (\cos^3 x - 1) = 0.$$

Giải

Điều kiện: $\text{cosx} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$ (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - \sin^3 x)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + (\cos^3 x - 1) = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin^3 x)\sin^2 x + (\cos^3 x - 1)\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin^3 x)(1 - \cos^2 x) + (\cos^3 x - 1)(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \text{sinx})(1 - \text{cosx})[(1 + \text{sinx} + \sin^2 x)(1 + \text{cosx}) - (\cos^2 x + \text{cosx} + 1)(1 + \text{sinx})] = 0$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} (1 - \text{cosx})[(\text{sinx} - \text{cosx})(\text{sinx} + \text{cosx}) + (\text{sinx} - \text{cosx})\text{sinx.cosx}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \text{cosx})(\text{sinx} - \text{cosx})(\text{sinx} + \text{cosx} + \text{sinx.cosx}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x = 1 & (1)\\ \sin x - \cos x = 0 & (2)\\ \sin x + \cos x + \sin x.\cos x = 0 & (3)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được $x = 2k\pi, k \in Z$

Giải (2): Ta được $\text{tgx} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

Giải (3): Đặt $\text{sinx} + \text{cosx} = t$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$, suy ra $\text{sinx.cosx} = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t+\frac{t^2-1}{2}=0\Leftrightarrow t^2+2t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1+\sqrt{2}\\ t=-1-\sqrt{2}\ (\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{4}=\alpha+2k\pi\\ x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\alpha+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}-\alpha+2k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: (ĐHGT – 95): Giải phương trình:

$$\text{tg}2x+\text{cotg}x=8\cos^2x.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x\neq k\pi\end{cases}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos x}{\sin x}=8\cos^2x\Leftrightarrow\frac{\cos x}{\cos 2x.\sin x}=8\cos^2x$$

$$\Leftrightarrow(8\sin x.\cos x.\cos 2x-1)\cos x=0\Leftrightarrow(2\sin 4x-1)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 4x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\ 4x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Bài 2: (ĐHNT TPHCM – 97): Giải phương trình:

$$2\text{tg}x+\text{cotg}x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\text{tg}x + (\text{tg}x + \text{cotg}x) = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \text{tg}x + \frac{2}{\sin 2x} = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm

Bài 3: (ĐHD – 2001): Giải phương trình:

$$\text{tg}^2x.\text{cotg}^2 2x.\text{cotg}3x = \text{tg}^2x - \text{cotg}^2 2x + \text{cotg}3x.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\\ \sin 3x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \sin 3x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x \neq k\pi\\ 3x \neq k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq \dfrac{k\pi}{3}\end{cases},\ k\in Z.\ \ (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\text{cotg}^2 2x - \text{tg}^2x = (1 - \text{tg}^2x.\text{cotg}^2 2x).\text{cotg}3x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x.\cos^2x - \sin^2 2x.\sin^2x = (\sin^2 2x.\ \cos^2x - \cos^2 2x.\sin^2x).\text{cotg}3x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x.\cos x = \sin 3x.\sin x.\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0\\ \cos x = \sin x\end{array}\right. \overset{(I)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}4\cos^2 x - 3 = 0\\ \cos x = \sin x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = \dfrac{1}{2}\\ \text{tg}x = 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài 4: (Đề 71): Giải phương trình:

$$3\text{tg}3x + \text{cotg}2x = 2\text{tg}x + \frac{2}{\sin 4x}.$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos 3x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\\ \cos x \neq 0\\ \sin 4x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x \neq 0\\ \sin 4x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 4x \neq k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}\\ x \neq \dfrac{k\pi}{4}\end{cases},\ k\in Z.\ \ (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(\text{tg}3x - \text{tg}x) + (\text{tg}3x + \text{cotg}2x) = \frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin 2x}{\cos 3x.\cos x} + \frac{\cos x}{\cos 3x.\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x.\sin x + 2\cos 2x.\cos x = 2\cos 3x$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x.\sin x + \cos 3x + \cos x = 2\cos 3x \Leftrightarrow 4\sin 4x.\sin x = \cos 3x - \cos x$

$\Leftrightarrow 8\sin 2x.\cos 2x.\sin x = -2\sin 2x.\sin x \overset{(I)}{\Leftrightarrow} \cos 2x = -\frac{1}{4} = \cos 2\alpha$

$\Leftrightarrow 2x = \pm 2\alpha + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k\pi,\ k\in Z.$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm

Bài 5: (ĐHTL TPHCM – 2001): Giải phương trình:

$$\text{tg}x - 3\text{cotg}x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x).$$

BÀI GIẢI

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2},\ k\in Z. \qquad \text{(I)}$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\cos^2 x = 2(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 2x$

$\Leftrightarrow [2\sin 2x - (\sin x - \sqrt{3}\cos x)](\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow [\sin 2x - (\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)](\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow [\sin 2x - \sin(x - \frac{\pi}{3})].\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 0$

Bạn đọc tự giải tiếp.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. (ĐHQG TPHCM – 96): Giải phương trình:

$$\text{tg}^2x - \text{tg}x.\text{tg}3x = 2.$$

Bài tập 2. Giải các phương trình:

a. $\text{tg}x + \text{cotg}x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$.

b. $2(\text{cotg}2x - \text{cotg}3x) = \text{tg}2x + \text{cotg}3x$.

c. $\text{tg}2x + \text{cotg}2x = 2\sin 4x$.

d. $2\text{cotg}2x - 3\text{cotg}3x = \text{tg}2x$.

Bài tập 3. Cho phương trình:

$$\frac{2}{\sin^2 x} + 2\text{tg}^2x + (2m+3)(\text{tg}x + \text{cotg}x) + 4 = 0.$$

a. Giải phương trình khi m = 1.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

CHỦ ĐỀ 12

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

MỞ ĐẦU

Các phương trình lượng giác rất đa dạng không thể có một công thức chung nào để giải mọi phương trình lượng giác, bởi vậy cần thiết sử dụng các phép biến đổi lượng giác thông thường để đưa phương trình ban đầu về các dạng cơ bản. Chúng ta đưa ra một nguyên tắc chung thường dùng khi giải phương trình lượng giác.

Thông thường phải thực hiện các việc sau:

- Nếu phương trình chứa nhiều hàm lượng giác khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa một hàm.
- Nếu phương trình chứa các hàm lượng giác của nhiều cung khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa các hàm lượng giác của một cung.

Sau khi biến đổi như trên nếu phương trình nhận được không có dạng quen thuộc thì có thể đi theo hai hướng:

Hướng thứ nhất:

Biến đổi phương trình đã cho để đưa về việc giải các phương trình đơn giản quen thuộc. Các phương pháp biến đổi theo hướng này gồm có:

Phương pháp đặt ẩn phụ.

Để đưa phương trình về việc giải một phương trình đại số.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$2\cos^2 x = \sin x + 1$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Đặt $t = \sin x$ điều kiện $|t| \le 1$, ta được:

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -1/2 \end{array}\right.$$

Phương pháp hạ bậc

Nếu phương trình cần giải có bậc cao thì dùng công thức hạ bậc để biến đổi về bậc thấp hơn.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$\sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x = 0.$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 6x}{2} - \sin^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow (\cos 6x - \cos 2x) + 2\sin^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 4x.\sin 2x + 2\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x(\sin 4x - \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin 2x.\cos 3x.\sin x = 0.$$

Phương pháp biến đổi thành phương trình tích.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$\sin 2x + \sin 4x = 2\cos x$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin 3x.\cos x = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos x(\sin 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin 3x = 1\end{array}\right..$$

Phương pháp tổng các số hạng không âm.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 3\text{tg}^2 2x - 2\sqrt{3}\,\text{tg}2x + 2 = 0$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sqrt{2}\sin x - 1)^2 + (\sqrt{3}\,\text{tg}2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \text{tg}2x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}.$$

Phương pháp đánh giá dùng để giải các phương trình không mẫu mực.

Thí dụ: Giải phương trình: $\cos x.\cos 2005x = 1$.

Lời giải

Ta có $|\cos x| \le 1$ & $|\cos 2005x| \le 1$.

Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases}\cos x = -1\ \&\ \cos 2005x = -1\\ \cos x = 1\ \&\ \cos 2005x = 1\end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Phương pháp hàm số : sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$2^{\cos x} - 2^{\sin x} = \sin x - \cos x.$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{\cos x} + \cos x = 2^{\sin x} + \sin x.$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên R.

Vậy phương trình được viết dưới dạng:

$$f(\cos x) = f(\sin x) \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$$

Hướng thứ hai:

Dùng lập luận khẳng định phương trình cần giải là vô nghiệm.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$\sin 2x - \cos 2x = \text{tg}x + \text{cotg}x \qquad (1)$$

Lời giải

- Vế trái của (1) ta có $|\sin 2x - \cos 2x| \le \sqrt{2}$.
- Vế phải của (1) ta có: $|\text{tg}x + \text{cotg}x| \ge 2$.

Vậy phương trình (1) là vô nghiệm.

Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta thực chất đã làm quen với phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình lượng giác trong các chủ đề

- Phương trình bậc 2 và bậc cao đối với một hàm số lượng giác.
- Phương trình đẳng cấp bậc 2 và bậc cao đối với sin và cos.
- Phương trình đối xứng.

trong bài toán này chúng xét thêm những trường hợp khác, bao gồm:

1. Mọi phương trình lượng giác đều có thể thực hiện việc đại số hoá thông qua hàm tg, cụ thể nếu đặt t = tgx thì:
$$\text{cotg}x = \frac{1}{t}$$
$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \text{tg}2x = \frac{2t}{1-t^2}$$
2. Đặt $t = \frac{1}{\sin x}$ hoặc $t = \frac{1}{\cos x}$, điều kiện $|t| \ge 1$.
3. Đặt t = a.sinx + b.cosx, điều kiện $|t| \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Ví dụ 1: Giải phương trình:
$$\text{cotg}x = \text{tg}x + 2\text{tg}2x.$$

Giải

Điều kiện:
$$\left\{\begin{array}{l}\sin x \ne 0\\ \cos x \ne 0\\ \cos 2x \ne 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin 2x \ne 0\\ \cos 2x \ne 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 4x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{4},\ k\in Z.$$

Cách 1: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ:

Đặt t = tgx, suy ra $\text{cotg}x = \frac{1}{t}$ và $\text{tg}2x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Khi đó phương trình có dạng:
$$\frac{1}{t} = t + \frac{4t}{1-t^2} \Leftrightarrow 1 - t^2 = t^2(1-t^2) + 4t^2$$
$$\Leftrightarrow t^4 - 6t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2-1)^2 = 4t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t^2 - 1 = 2t\\ t^2 - 1 = -2t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t^2 - 2t - 1 = 0\\ t^2 + 2t - 1 = 0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1 \pm \sqrt{2}\\ t = -1 \pm \sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{tg}x = 1 - \sqrt{2} = \text{tg}\alpha_1\\ \text{tg}x = 1 + \sqrt{2} = \text{tg}\alpha_2\\ \text{tg}x = -1 - \sqrt{2} = \text{tg}\alpha_3\\ \text{tg}x = -1 + \sqrt{2} = \text{tg}\alpha_4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \alpha_1 + k\pi\\ x = \alpha_2 + k\pi\\ x = \alpha_3 + k\pi\\ x = \alpha_4 + k\pi\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng phương pháp luận hệ số để phân tích:

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\text{cotg}x - \text{tg}2x = \text{tg}x + \text{tg}2x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos x.\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x)\cos x = \sin 3x.\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x.\cos x - \sin 3x.\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Thông qua 2 cách giải trên các em học sinh cần lưu ý rằng với nhiều phương trình lượng giác phương pháp giải chính quy đôi khi không tỏ ra hiệu quả.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$4\text{tg}^2x + \frac{4m}{\cos x} + 5 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$4\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) + \frac{4m}{\cos x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\cos^2 x} + \frac{4m}{\cos x} + 1 = 0$$

Đặt $t = \frac{2}{\cos x}$, điều kiện $|t| \geq 2$, khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + 2mt + 1 = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = -1$, ta được:

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (loại)}.$$

Vậy, với $m = -1$ phương trình vô nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau :

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $t \geq 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{(2) có nghiệm } t_1 \leq 2 \leq t_2 \\ \text{(2) có nghiệm } 2 \leq t_1 \leq t_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(2) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(2) \geq 0 \\ S/2 \geq 2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m + 5 \leq 0 \\ \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ 4m + 5 \geq 0 \\ -m \geq 2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{4}$$

Vậy, với $m \leq -\frac{5}{4}$ phương trình đã cho có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

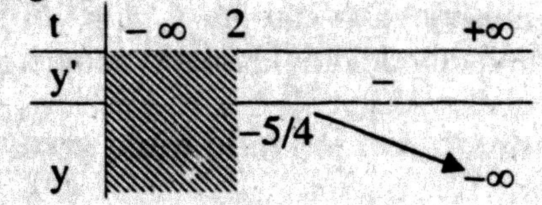
Cách 2: Phương trình (1) có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt phần đồ thị hàm số $y = -t - \frac{1}{t}$ trên $D = [2, +\infty)$

Xét hàm số $y = -t - \frac{1}{t}$ trên $D = [2, +\infty)$.

Đạo hàm $y' = -1 + \frac{1}{t^2} < 0, \forall t \in D \Rightarrow$ hàm số nghịch biến rên D.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là $m \le -\frac{5}{4}$.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$(m+1)tg^4x - 3m(1 + tg^2x)tg^2x + \frac{4m}{\cos^4 x} = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{9}{37}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm khác $k\pi, k \in Z$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m+1)tg^4x - 3m(1 + tg^2x)tg^2x + 4m(1 + tg^2x)^2 = 0.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $(1 + tg^2x)^2 \neq 0$, ta được:

$$(m+1).\left(\frac{tg^2x}{1+tg^2x}\right)^2 - 3m.\frac{tg^2x}{1+tg^2x} + 4m = 0.$$

Đặt $t = \frac{tg^2x}{1+tg^2x}$, điều kiện $0 \le t < 1$, khi đó phương trình có dạng:

$$(m+1)t^2 - 3mt + 4m = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = -\frac{9}{37}$, ta được:

$$28t^2 + 27t - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3/4 \\ t = -12/7 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow tg^2x = 3 \Leftrightarrow tgx = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \text{ loại} \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Trường hợp 2: Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Phương trình (1) có nghiệm :

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t \in (0, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2)\text{ có một nghiệm thuộc }(0,1) \\ (2)\text{ có hai nghiệm thuộc }(0,1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0).f(1) < 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(0) > 0 \\ af(1) > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m(2m+1) < 0 \\ \begin{cases} -m^2 - 16m \geq 0 \\ 4m(m+1) > 0 \\ (m+1)(2m+1) > 0 \\ 0 < \dfrac{3m}{2(m+1)} < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Vậy với $m > -\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$2\left(\frac{4}{\cos^2 x} + \cos^2 x\right) + m\left(\frac{2}{\cos x} - \cos x\right) = 1 \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 9$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$$

Đặt $t = \dfrac{2}{\cos x} - \cos x$, suy ra $\dfrac{4}{\cos^2 x} + \cos^2 x = t^2 + 4$.

Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$2(t^2 + 4) + mt - 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = 2t^2 + mt + 7 = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 9, ta được:

$$2t^2 + 9t + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{\cos x} - \cos x = -1 \\ \dfrac{2}{\cos x} - \cos x = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \\ 2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \cos x = 2 \text{ (loại)}\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\\ \cos x = 4 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy, với $m = 9$, phương trình có ba họ nghiệm.

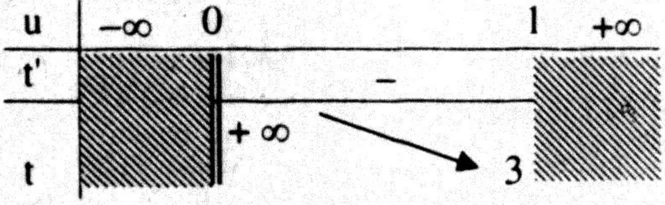
b. Trước tiên ta đi tìm điều kiện cho t khi $x\in(0, \frac{\pi}{2})$.

Đặt $u = \cos x$, với $x\in(0, \frac{\pi}{2})$ thì $u\in(0, 1)$, khi đó xét hàm số $t = \frac{2}{u} - u$ trên tập $D_u = (0, 1)$.

Đạo hàm:

$$t' = -\frac{2}{u^2} - 1 < 0, \text{ với } \forall u\in D_u \Rightarrow \text{hàm số nghịch biến trên } D_u.$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là $t \geq 3$.

Vậy để (1) có nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$:

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thoả mãn $t \geq 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{(2) có một nghiệm } t \geq 3\\ \text{(2) có hai nghiệm } t \geq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(3) \leq 0 \\ \left\{\begin{array}{l}\Delta \geq 0\\ af(3) \geq 0\\ S/2 \geq 3\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq -\frac{25}{3}.$$

Vậy với $m \leq -\frac{25}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a. (ĐHQG Hà Nội − 96): $1 + 3\sin 2x = 2\text{tg}x$.

b. (ĐHQG Hà Nội − 2000): $1 + 3\text{tg}x = 2\sin 2x$.

c. $6\text{tg}x = \text{tg}2x$.

d. $\sin 2x + 2\text{tg}x = 3$.

ài tập 2. Giải các phương trình:

a. $\cos x + \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1$.

b. $2 + \cos x = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

ài tập 3. Giải các phương trình:

a. $(1 - \mathrm{tg}x)(1 + \sin 2x) = 1 + \mathrm{tg}x$

b. $4\sin^2 x + 3\mathrm{tg}^2 x = 1$.

c. $3\sin x + \cos x - 4\mathrm{cotg}\frac{x}{2} + 1 = 0$

d. (ĐHY Hà Nội – 96): $(\cos x - \sin x)\cos x.\sin x = \cos x.\cos 2x$.

ài tập 4. Cho phương trình:

$$\mathrm{cotg}^2 x + \frac{m}{\sin x} + 2m - 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.

ài tập 5. Cho phương trình:

$$4\mathrm{tg}^2 x - 2m(1 + \mathrm{tg}^2 x)\mathrm{tg}x + \frac{4}{\cos^4 x} = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -5$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

ài tập 6. Cho phương trình:

$$(1 - a)\mathrm{tg}^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0.$$

a. Giải phương trình khi $a = \frac{1}{2}$.

b. Xác định a để phương trình có nhiều hơn 1 nghiệm trong khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$

ài tập 7. Cho phương trình:

$$\frac{4}{\cos^2 x} + \cos^2 x + m(\frac{2}{\cos x} + \cos x) - 3 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{2}{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

ài tập 8. Cho phương trình:

$$3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = m.$$

a. Giải phương trình với $m = 6$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0, \pi)$.

Bài toán 2: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đổi biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng biến t để chuyển phương trình ban đầu về chứa các cung t, 2t, 3t ..., kt, rồi sử dụng các công thức góc nhân đôi, nhân ba ...

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 5\sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos3x.$$

Giải

Đặt $t = x - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 2t \ \& \ 3x = 3t + \frac{\pi}{2}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin2t = 5\sin t + \cos(3t + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \sin2t = 5\sin t - \sin3t$$

$$\Leftrightarrow \sin3t + \sin2t = 5\sin t \Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t + 2\sin t.\cos t = 5\sin t$$

$$\Leftrightarrow (3 - 4\sin^2 t + 2\cos t - 5)\sin t = 0 \Leftrightarrow (2\sin^2 t - \cos t + 1)\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow [2(1 - \cos^2 t) - \cos t + 1]\sin t = 0 \Leftrightarrow (2\cos^2 t + \cos t - 3)\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \cos t = 1 \\ \cos t = -3/2 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$32\cos^6(x + \frac{\pi}{4}) - \sin6x = 1.$$

Giải

Đặt $t = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 6x = 6t - \frac{3\pi}{2}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$32\cos^6 t - \sin(6t - \frac{3\pi}{2}) = 1 \Leftrightarrow 32\left(\frac{1 + \cos2t}{2}\right)^3 - \cos6t = 1$$

$$\Leftrightarrow 4(1 + 3\cos2t + 3\cos^2 2t + \cos^3 2t) - (4\cos^3 2t - 3\cos2t) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 5\cos2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos2t = -1 \\ \cos2t = -\frac{1}{4} = \cos2\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = \pi + 2k\pi \\ 2t = \pm2\alpha + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ t = \alpha + k\pi \\ t = -\alpha + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \alpha + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\alpha + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

í dụ 3: (ĐHQG Hà Nội – 99): Giải phương trình:

$$8\cos^3(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 3x.$$

ải

Đặt $t = x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 3x = 3t - \pi$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$8\cos^3 t = \cos(3t - \pi) \Leftrightarrow 8\cos^3 t = -\cos 3t \Leftrightarrow 8\cos^3 t = -(4\cos^3 t - 3\cos t)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - \cos t = 0 \Leftrightarrow (4\cos^2 t - 1)\cos t = 0 \Leftrightarrow [2(1 + \cos 2t) - 1]\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + 2\cos 2t)\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 0 \\ \cos 2t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ t = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

í dụ 4: Giải phương trình:

$$2\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin 3x - \cos 3x.$$

ải

Đặt $t = x + \frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x = 3t - \frac{\pi}{2}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$2\cos t = \sin(3t - \frac{\pi}{2}) - \cos(3t - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow 2\cos t = -\cos 3t - \sin 3t$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t = -(4\cos^3 t - 3\cos t) - (3\sin t - 4\sin^3 t)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - \cos t + 3\sin t - 4\sin^3 t = 0. \qquad (1)$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

  Khi đó phương trình có dạng:

  $$3\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) - 4\sin^3(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0 \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, phương trình không nhận $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 t \neq 0$, ta được:

$$4 - (1 + tg^2t) + 3(1 + tg^2t).tgt - 4tg^3t = 0$$

$$\Leftrightarrow tg^3t + tg^2t - 3tgt - 3 = 0 \Leftrightarrow (tgt + 1)(tg^2t - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgt = -1 \\ tgt = \sqrt{3} \\ tgt = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ t = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ t = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x = 2\cos(\frac{\pi}{6} - x)$.

b. $\cos 3x = 2\sin(x + \frac{5\pi}{6})$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 3\sin(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2})$.

b. $\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 3\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$.

Bài tập 3. Giải phương trình:

a. $\cos 9x + 2\cos(6x + \frac{2\pi}{3}) + 2 = 0$.

b. $2\cos\frac{6x}{5} + 1 = 3\cos\frac{8x}{5}$.

Bài tập 4. (HVCNBCVT – 99): Giải phương trình:

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sin 2x.\ \sin(x + \frac{\pi}{4}).$$

Bài tập 5. (ĐHTL – 2001): Giải phương trình:

$$\sin(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}).$$

Bài toán 3: Giải phương trình lượng giác sử dụng công thức hạ bậc.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Thực hiện việc hạ bậc của phương trình bằng các công thức:

Hạ bậc đơn:

1. $\sin^2x = \frac{1}{2}(1 - \cos2x)$
2. $\cos^2x = \frac{1}{2}(1 + \cos2x)$
3. $tg^2x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$
4. $cotg^2x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

1. $\sin^3x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin3x)$
2. $\cos^3x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos3x)$
3. $tg^3x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{3\cos x + \cos 3x}$
4. $cotg^3x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{3\sin x - \sin 3x}$

ngoài ra còn có:

$$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin2x.$$

Hạ bậc toàn cục: Chúng ta đã được biết trong dạng phương trình hỗn hợp chứa $\sin^n x$ và $\cos^n x$.

Hạ bậc đối xứng: Giả sử cần biến đổi biểu thức dạng:

$$A = \sin^3x.\cos3x + \cos^3x.\sin3x$$

ta có thể lựa chọn hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$A = \sin^2x.\sin x.\cos3x + \cos^2x.\cos x.\sin3x$$
$$= (1 - \cos^2x).\sin x.\cos3x + (1 - \sin^2x).\cos x.\sin3x$$
$$= \sin x.\cos3x + \cos x.\sin3x - (\cos x.\cos3x + \sin x.\sin3x)\sin x.\cos x$$
$$= \sin4x - \frac{1}{2}\cos2x.\sin2x = \sin4x - \frac{1}{4}\sin4x = \frac{3}{4}\sin4x.$$

Cách 2: Ta có:

$$A = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin3x)\cos3x + \frac{1}{4}(3\cos x + \cos3x)\sin3x$$
$$= \frac{3}{4}(\sin x.\cos3x + \cos x.\sin3x) = \frac{3}{4}\sin4x.$$

Ví dụ 1: (Đề 48): Giải phương trình:

$$\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin(10x + \frac{17\pi}{2}).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1+\cos 16x}{2} = \sin(10x + \frac{\pi}{2} + 8\pi)$$
$$\Leftrightarrow 2\cos10x + \cos16x + \cos4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos10x + 2\cos10x.\cos6x = 0$$
$$\Leftrightarrow (\cos6x + 1)\cos10x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x = -1\\ \cos 10x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x = \pi + 2k\pi\\ 10x = \frac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}\end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy, phương trình có 2 họ nghiệm.

Chú ý: Với những phương trình chứa số lẻ các nhân tử bậc cao (giả sử bằng 3 thông thường ta không đi hạ bậc tất cả các nhân tử đó mà chỉ chọn ra 2 nhân t để hạ bậc. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: (ĐHQG Hà Nội – 98): Giải phương trình:

$$\sin^2 x = \cos^2 2x + \cos^2 3x.$$

Giải

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1+\cos 4x}{2} + \cos^2 3x \Leftrightarrow 2\cos^2 3x + (\cos 4x + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 3x + 2\cos 3x.\cos x = 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x)\cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x.\cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$\sin^3 x.\cos 3x + \sin 3x.\cos^3 x = \sin^3 4x + m. \qquad (1)$$

a. (ĐHNT Hà Nội – 99): Giải phương trình với m = 0.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{6}]$.

Giải

Ta có:

$$VT = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\cos 3x + \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\sin 3x$$

$$= \frac{3}{4}(\sin x.\cos 3x + \cos x.\sin 3x) = \frac{3}{4}\sin 4x.$$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{3}{4}\sin 4x = \sin^3 4x + m \Leftrightarrow 3\sin 4x - 4\sin^3 4x = m \Leftrightarrow \sin 12x = m. (2)$$

a. Với m = 0, ta được:

$$\sin 12x = 0 \Leftrightarrow 12x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{12}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Số nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{6}]$ của phương trình (1) bằng số giao điểm của đườn thẳng y = 4m với phần đồ thị hàm số y = sin12x lấy trên $[0, \frac{\pi}{6}]$.

Xét hàm số y = sin12x trên đoạn $[0, \frac{\pi}{6}]$.

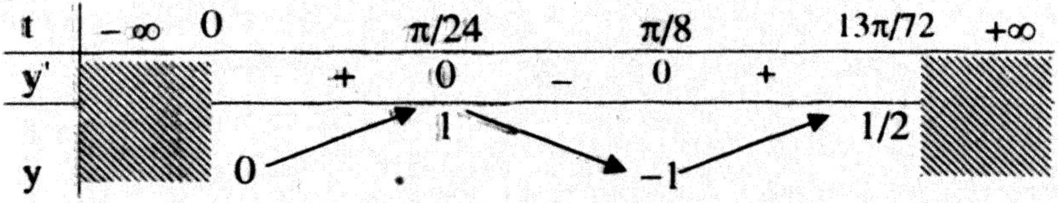
Đạo hàm:

$$y' = 12\cos 12x,$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 12\cos 12x = 0 \Leftrightarrow 12x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12} \overset{x\in[0,\frac{\pi}{6}]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{24} \\ x = \dfrac{\pi}{8} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là:

$$0 \le 4m \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{1}{8}.$$

Vậy với $0 \le m \le \frac{1}{8}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Việc hạ bậc trong nhiều trường hợp sẽ giúp chúng ta đánh giá đúng đắn mối liên hệ giữa các cung góc trong phương trình. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 4: (Đề 52): Giải phương trình:

$$\cos^2 x = \cos\frac{4x}{3}.$$

Giải

Ta có:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(3.\frac{2x}{3})].$$

Đặt $t = \frac{2x}{3}$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 3t) = \cos 2t \Leftrightarrow 1 + 4\cos^3 t + 3\cos t = 2(2\cos^2 t - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 4\cos^2 t - 3\cos t + 3 = 0 \Leftrightarrow (\cos t - 1)(4\cos^2 t - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ 4\cos^2 t - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ 2(1 + \cos 2t) - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 1 \\ \cos 2t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x}{3} = 2k\pi \\ 2.\dfrac{2x}{3} = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3k\pi}{2} \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Chú ý: Với các nhân tử bậc cao hơn 3, ta cần hạ bậc dần. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 5: (ĐHHH – 95): Giải phương trình:

$$\sin^4x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{4}(1 - \cos2x)^2 + \frac{1}{4}[1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2})]^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (1 - \cos2x)^2 + (1 - \sin2x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos2x + \sin2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. (Đề 48): $\sin^24x - \cos^26x = \sin(10x + \frac{21\pi}{2})$.

b. (ĐHKTQD Hà Nội – 99): $\sin^2x + \sin^23x = \cos^22x + \cos^24x$.

c. (ĐH Huế – 98): $\sin^23x + \sin^22x + \sin^2x = \frac{3}{2}$.

d. (ĐHY – 98): $\sin^23x - \sin^22x - \sin^2x = 0$.

e. (ĐH Việt Nam Khối B – 2002): $\sin^23x - \cos^24x = \sin^25x - \cos^26x$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. **(Đề 135): $\sin^3x.\sin3x + \cos^3x.\cos3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.**

b. (Đề 142): $\sin^3x.\sin3x + \cos^3x.\cos3x = \cos^34x$.

c. (ĐHNN – 2001): $\cos^3x.\cos3x - \sin3x.\sin^3x = \cos^34x + \frac{1}{4}$.

d. (ĐHLN – 97): $\sin^32x.\cos6x + \sin6x.\cos^32x = \frac{3}{8}$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $32\cos^6x = 1 + \cos6x$.

b. $\sin^22x - \cos^28x = \sin(\frac{17\pi}{2} + 10x)$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\cos^3x.\cos3x + \sin^3x.\sin3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b. $\cos^34x = \cos3x.\cos^3x + \sin^3x.\sin3x$.

tập 5. Giải các phương trình sau:

. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x.$

). $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0.$

tập 6. Giải các phương trình sau:

. $\cos^4 x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}.$

). $\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\sin^2 2x + \cos^2 2x}.$

tập 7. (ĐHSP TPHCM – 2000): Giải phương trình:

$$2\cos^2 x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x - 3 = (2\sin 2x + 1)\cos 4x.$$

tập 8. (ĐHTDTT – 2001): Giải phương trình:

$$\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 2\cos^2\frac{9x}{2}.$$

tập 9. Cho phương trình:

$$\sin^2[(x + 1)y] = \sin^2(xy) + \sin^2[(x - 1)y].$$

Tìm nghiệm x, y của phương trình để (x + 1)y, xy, (x – 1)y là số đo các góc am giác.

tập 10. Xác định m để phương trình :

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{4}m.\sin 4x - (2m + 1)\sin^2 x.\cos^2 x = 0$$

nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

tập 11. Xác định a để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

tập 12. Cho phương trình:

$$\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m\text{tg}2x$$

. Giải phương trình khi $m = \frac{1}{8}$.

). Xác định m để phương trình có nghiệm

tập 13. Tìm a để phương trình sau có nghiệm :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a|\sin 2x|$$

tập 14. Giải và biện luận phương trình:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

tập 15. Tìm tổng các nghiệm của phương trình:

$$2\cos^2 x + \text{cotg}^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}$$

mãn $2 \le x \le 40$.

Bài toán 4: Biến đổi phương trình lượng giác thành phương trình tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Việc biến đổi phương trình lượng giác về phương trình tích phụ thuộc các phép biến đổi dạng:

Dạng 1: Biến đổi tổng, hiệu thành tích.
Dạng 2: Biến đổi tích thành tổng.
Dạng 3: Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x.
Dạng 4: Phương pháp luận hệ số.
Dạng 5: Phương pháp hằng số biến thiên.
Dạng 6: Phương pháp nhân.
Dạng 7: Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp.

ta đưa phương trình cần giải về dạng tích:

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.,$$

trong đó các phương trình A = 0, B = 0 là các phương trình có dạng chuẩn.

Với các bài toán có tham số, để xác định điều kiện sao cho phương trình đúng k nghiệm trên miền D, cần chú ý tới số nghiệm của mỗi phương t thành phần.

Sau đây ta sẽ đi xét từng dạng.

1. Phương pháp biến đổi tổng, hiệu thành tích

Ví dụ 1: (ĐHNL TPHCM – 2001): Giải phương trình:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi tổng thành tích.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 + \cos 2x) + (\cos 3x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos 2x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \cos 2x).\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi về phương trình chứa 1 hàm lượng giác.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 + 4\cos^3 x - 3\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow (2\cos^2 x + \cos x - 1)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét: Cách 1 tỏ ra đơn giản hơn nhưng các em học sinh cần nhớ rằng nếu VP là hằng số khác 0 hoặc chứa tham số thì cách 2 là sự lựa chọn đúng đắn.

Ví dụ 2: (HVQHQT – 99): Giải phương trình:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos x + \cos 3x) + (\cos 2x + \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x + 2\cos 3x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \cos 3x).\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos\dfrac{5x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{5x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2k\pi}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2k\pi}{5} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét: Trong lời giải trên ta lựa chọn cách gom *__theo hiệu__* (hiệu hai góc bằng nhau) do đó đương nhiên có thể nhóm:

$$(\cos x + \cos 2x) + (\cos 3x + \cos 4x) = 0.$$

Ngoài ra còn có thể gom *__theo tổng__* (tổng hai góc bằng nhau)

$$(\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x) = 0.$$

Ví dụ 3: (ĐHNT TPHCM – 2000): Giải phương trình:

$$1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - \cos 2x) + \sin x + (\cos 3x - \cos x) - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 2\sin 2x.\sin x - 2\sin x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1 - 4\sin x.\cos x - 2\cos x)\sin x = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 1)(1 - 2\cos x)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có năm họ nghiệm.

Nhận xét: Trong lời giải trên sở dĩ ta lựa chọn cách gom như vậy bởi nhận th
rằng chúng đều có chung nhân tử sinx.

Ví dụ 4: (ĐHNT Hà Nội – 98): Giải phương trình:

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x - \cos x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^3 x - \cos^3 x) + (\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[1 + (\sin x + \cos x) + (1 + \sin x\cos x) + (\sin x + \cos x)] =$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x - \cos x = 0 & (1) \\ 2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x.\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \text{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in Z$$

Giải (2): Đặt sinx + cosx = t, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$2 + 2t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 5: (Đề 129): Giải và biện luận theo a, b phương trình:

$$\cos ax + \cos 2bx - \cos(a + 2b)x = 1.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - \cos ax) + [\cos(a + 2b)x - \cos 2bx] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{ax}{2} - 2\sin(\frac{a}{2} + 2b)x.\sin\frac{ax}{2} = 0 \Leftrightarrow [\sin\frac{ax}{2} - \sin(\frac{a}{2} + 2b)x].\sin\frac{ax}{2} = ($$

$$\Leftrightarrow 2\cos(\frac{a}{2} + b)x.\sin(-bx).\sin\frac{ax}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos(\frac{a}{2} + b)x.\sin bx.\sin\frac{ax}{2} =$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(\frac{a}{2} + b)x = 0 \\ \sin bx = 0 \\ \sin\frac{ax}{2} = 0 \end{array}\right. . \qquad \text{(I)}$$

- Với a = 0, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos bx = 0 \\ \sin bx = 0 \\ \sin 0.x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{phương trình nghiệm đúng với } \forall x \in R.$$

- Với b = 0, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{ax}{2} = 0 \\ \sin 0.x = 0 \\ \sin\dfrac{ax}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{phương trình nghiệm đúng với } \forall x \in R.$$

- Với $\frac{a}{2} + b = 0$ và a, b ≠ 0, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} bx = k\pi \\ \dfrac{ax}{2} = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{b} \\ x = \dfrac{2k\pi}{a} \end{array}\right., k \in Z.$$

- Với $\frac{a}{2} + b \neq 0$ và a, b ≠ 0, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\dfrac{a}{2} + b)x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ bx = k\pi \\ \dfrac{ax}{2} = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi + 2k\pi}{a + 2b} \\ x = \dfrac{k\pi}{b} \\ x = \dfrac{2k\pi}{a} \end{array}\right., k \in Z.$$

í dụ 6: **Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thuộc $[0, \frac{3\pi}{4}]$**

$$\sin 2x + m = \sin x + 2m\cos x. \qquad (1)$$

iải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin x.\cos x + m = \sin x + 2m\cos x \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} \in [0, \dfrac{3\pi}{4}] \\ \sin x = m \qquad (1) \end{array}\right. .$$

Vậy để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $[0, \frac{3\pi}{4}]$

⇔ phương trình (1) có đúng một nghiệm khác $\frac{\pi}{3}$ thuộc $[0, \frac{3\pi}{4}]$.

Nhận xét rằng phương trình sinx = m nếu có nghiệm $\alpha \in [0,\pi]$ thì cũng sẽ có nghiệm $\pi - \alpha \in [0,\pi]$, do đó điều kiện là phương trình sinx = m có nghiệm $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$ hoặc $x \in [0, \frac{\pi}{4})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \sin\frac{\pi}{3} \\ m = \sin\frac{\pi}{2} \\ 0 \le m < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ m = 1 \\ 0 \le m < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. .$$

2. Phương pháp biến đổi tích thành tổng

Ví dụ 7: (Đề 118): Cho phương trình:

$$2\cos x.\cos 2x.\cos 3x + m = 7\cos 2x. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m = − 7.

b. Tìm để phương trình có nhiều hơn một nghiệm $x \in [-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}]$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos 4x + \cos 2x).\cos 2x + m = 7\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x).\cos 2x + m = 7\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x + \cos^2 2x - 8\cos 2x + m = 0.$$

Đặt t = cos2x, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$2t^3 + t^2 - 8t + m = 0. \quad (2)$$

a. Với m = 7, ta được:

$$2t^3 + t^2 - 8t - 7 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(2t^2 - t - 7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1 \pm \sqrt{57}}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Với $x \in [-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}] \Rightarrow t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Vậy để phương trình (1) có nhiều hơn một nghiệm $x \in [-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}]$

$\Leftrightarrow$ (2) có nhiều hơn một nghiệm $t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Xét hàm số $y = 2t^3 + t^2 - 8t + m$ trên $D = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Đạo hàm

$y' = 6t^2 + 2t > 0, \forall t \in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên D

do đó (2) không thể có nhiều hơn một nghiệm $t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Vậy không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

3. Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x

Ví dụ 8: (Đề 68): Giải phương trình:

$$2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2(\cos x + 1)\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos x + 1)(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin x)[2(\cos x + 1)(1 + \sin x) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)[1 + 2\sin x.\cos x + 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)[(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + 2 = 0 \text{ vn} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét:

a. Trong lời giải trên sở dĩ chúng ta lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

bởi 2 nhân tử còn lại là $2\cos^3 x$ (cos có hệ số 2) và sinx (sin có hệ số 1).

b. Như vậy trong trường hợp trái lại, ta sẽ lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Cụ thể chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 9: (ĐHNN I – 99): Giải phương trình:

$$2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin^3 x - 1 + 2\sin^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2(\sin x + 1)\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + 1)(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow (1 - \cos x)[2(\sin x + 1)(1 + \cos x) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)[1 + 2\sin x.\cos x + 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)[(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + 2 = 0 \text{ vn} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy chúng ta đã có được phương pháp suy luận trong việc lựa chọn hai hướng biến đổi cho cos2x. Cuối cùng, trong trường hợp hệ số đối xứng ta sẽ lựa chọn phép biến đổi:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Cụ thể chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 10: (ĐHY Hà Nội – 2000): Giải phương trình:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x + \sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = 0 & (1) \\ 1 - \sin x.\cos x + \sin x - \cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\sin x = -\cos x \Leftrightarrow \text{tg}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k\in Z.$$

Giải (2): Đặt sinx – cosx = t, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Khi đó (2) có dạng:

$$1 - \frac{1 - t^2}{2} + t = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Chú ý: Đôi khi việc gom các toán tử trong đầu bài nhằm tăng độ phức tạp của bài toán. Khi đó để tiện cho việc cân nhắc lựa chọn phép biến đổi, các em học sinh hãy chuyển phương trình về dạng đơn. Cụ thể ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 11: (ĐHQG Hà Nội – 95): Giải phương trình:

$$4\sin 2x - 3\cos 2x = 3(4\sin x - 1).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin 2x - 3\cos 2x = 12\sin x - 3 \Leftrightarrow 4\sin 2x - 3(1 - 2\sin^2 x) = 12\sin x - 3$$

$\Leftrightarrow 8\sin x.\cos x + 6\sin^2x = 12\sin x \Leftrightarrow 2(4\cos x + 3\sin x - 6)\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ 4\cos x + 3\sin x = 6 \text{ vô nghiệm}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi, k\in Z.$$

Nhận xét: Trong lời giải trên khi chuyển phương trình về dạng đơn, ta lựa chọn phép biến đổi $\cos 2x = 1 - 2\sin^2x$ bởi khi đó sẽ khử được số hạng tự do và cùng với nhận xét các toán tử còn lại đều chứa sinx.

Ví dụ 12: (ĐHTS – 99): Tìm m để phương trình sau có nghiệm $x\in(0, \frac{\pi}{4})$:

$$\sin^4x + \cos 2x + m.\cos^6x = 0. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - \cos^2x)^2 + 2\cos^2x - 1 + m.\cos^6x = 0 \Leftrightarrow \cos^4x + m.\cos^6x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + m.\cos^2x).\cos^4x = 0 \Leftrightarrow m.\cos^2x = -1. \qquad (2)$$

Vì $x\in(0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \cos^2x < 1$,

do đó để phương trình (1) có nghiệm $x\in(0, \frac{\pi}{4})$ điều kiện là:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{1}{2} < -\frac{1}{m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$$

Vậy, với $-2 < m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

4. Phương pháp luận hệ số

Ví dụ 13: (HVQHQT – 2000): Giải phương trình:

$$\cos x + \cos 3x + 2\cos 5x = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos 5x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos 2x + 2\cos 4x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3x - 3\cos x).\cos 2x + \cos 4x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow [(4\cos^2x - 3).\cos 2x + \cos 4x].\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \{[2(1 + \cos 2x) - 3].\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1\}.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 2x - \cos 2x - 1).\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} = \cos 2\alpha_{1,2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \pm 2\alpha_{1,2} + 2k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\alpha_{1,2} + k\pi\end{array}\right., k\in Z$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 14: (ĐHTL – 2000): Giải phương trình:

$$\frac{\sin 3x}{3} = \frac{\sin 5x}{5}.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$5\sin 3x = 3\sin 5x \Leftrightarrow 2\sin 3x = 3(\sin 5x - \sin 3x)$

$\Leftrightarrow 2(3\sin x - 4\sin^3 x) = 6\cos 4x.\sin x \Leftrightarrow (3 - 4\sin^2 x - 3\cos 4x).\sin x = 0$

$\Leftrightarrow [3 - 2(1 - \cos 2x) - 3(2\cos^2 2x - 1)].\sin x = 0 \Leftrightarrow (3\cos^2 2x - \cos 2x - 2).\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = -\dfrac{2}{3}\\ \sin x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -\dfrac{2}{3} = \cos 2\alpha\\ \sin x = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \pm 2\alpha + 2k\pi\\ x = k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\alpha + k\pi\\ x = k\pi\end{array}\right., k \in Z.$$

Chú ý: Các em học sinh cũng có thể giải ví dụ trên theo phương pháp tách dần:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$

$\sin 5x = \sin(x + 4x) = \sin x.\cos 4x + \cos x.\sin 4x$

$= \sin x.\cos 4x + 2\cos x.\cos 2x.\sin 2x = \sin x.\cos 4x + 4\cos^2 x.\cos 2x.\sin x.$

Ví dụ 15: (ĐHGT – 97): Giải phương trình:

$$3(\cot g x - \cos x) - 5(\operatorname{tg} x - \sin x) = 2.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$3(\cot g x - \cos x + 1) - 5(\operatorname{tg} x - \sin x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x + 1\right) - 5\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\cos x - \sin x.\cos x + \sin x)}{\sin x} - \frac{5(\sin x - \sin x.\cos x + \cos x)}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - \sin x.\cos x)\left(\frac{3}{\sin x} - \frac{5}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\dfrac{3}{\sin x} = \dfrac{5}{\cos x} & (1)\\ \sin x + \cos x - \sin x.\cos x = 0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{5} = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in Z.$$

Giải (2): Đặt sinx + cosx = t, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra sinx.cosx = $\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t - \frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1-\sqrt{2} \\ t = 1+\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \beta + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \beta + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \beta + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 16: (ĐHQG Hà Nội Khối A – 2000): Giải phương trình:

2sinx + cotgx = 2sin2x + 1.

Giải

Điều kiện:

$\sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi, k \in Z.$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(2\sin x - 1) - (2\sin 2x - \text{cotg}x) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1) - (4\sin x.\cos x - \frac{\cos x}{\sin ..}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1) - \frac{(4\sin^2 x - 1)\cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)[\sin x - (2\sin x + 1)\cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin x - 1 = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x - 2\sin x.\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z$$

Giải (2): Đặt sinx – cosx = t, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra sinx.cosx = $\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t - (1 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\alpha+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\alpha+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x=\frac{5\pi}{4}-\alpha+2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

. Phương pháp hằng số biến thiên

í du 17: (HVQY – 97): Giải phương trình:

$$(\sin x+3)\sin^4\frac{x}{2}-(\sin x+3)\sin^2\frac{x}{2}+1=0.$$

iải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

ách 1: Phương pháp hằng số biến thiên.

Đặt $t=\sin^2\frac{x}{2}$, điều kiện $0\le t\le 1$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(\sin x+3)t^2-(\sin x+3)t+1=0$$

Ta có $\Delta=(\sin x+3)^2-4(\sin x+3)=(\sin x+3)(\sin x-1)\le 0$

o đó phương trình được chuyển thành:

$$\begin{cases}\Delta=0\\ t=-\frac{b}{2a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x-1=0\\ \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=1\\ 1-\cos x=1\end{cases} \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

ách 2: Phương pháp phân tích.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin^2\frac{x}{2}-1)(\sin x+3)\sin^2\frac{x}{2}+1=0 \Leftrightarrow -(\sin x+3)\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(\sin x+3)\sin^2 x+1=0 \Leftrightarrow \sin^3 x+3\sin^2 x-4=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-1)(\sin^2 x+4\sin x+4)=0 \Leftrightarrow (\sin x-1)(\sin x+2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

. Phương pháp nhân

í du 18: (HVQHQT – 96): Giải phương trình:

$$\sin\frac{5x}{2}=5\cos^3 x.\sin\frac{x}{2}.$$

iải

. Với $\cos\frac{x}{2}=0$, ta được:

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=-1 \ \& \ \sin\frac{x}{2}=\pm 1 \Rightarrow VP=\pm 5$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\sin\frac{5x}{2} = \pm 5 \text{ vô nghiệm..}$$

Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi,\ k\in Z.$ (*)

Nhân cả hai vế của phương trình với $2\cos\frac{x}{2} \neq 0$, ta được:

$$2\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{x}{2} = 10\cos^3x.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin3x + \sin2x = 5\cos^3x.\sin x \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3x + 2\sin x.\cos x = 5\cos^3x.\sin x$$

$$\Leftrightarrow (3 - 4\sin^2x + 2\cos x - 5\cos^3x).\sin x = 0 \Leftrightarrow (5\cos^3x - 4\cos^2x - 2\cos x + 1).\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (5\cos^2x + \cos x - 1)(\cos x - 1)\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\cos^2x + \cos x - 1 = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{10} = \cos\alpha \\ \cos x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{10} = \cos\beta \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\alpha + 2k\pi \\ x = \pm\beta + 2k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = \pm\alpha + 2k\pi \\ x = \pm\beta + 2k\pi,\ k\in Z \\ x = 2k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có năm họ nghiệm.

7. Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp

Ví dụ 19: (Đề 76): Giải phương trình:

$$\cos10x + 2\cos^24x + 6\cos3x.\cos x = \cos x + 8\cos x.\cos^33x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos10x + 1 + \cos8x = \cos x + 2(4\cos^33x - 3\cos3x)\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos9x.\cos x + 1 = \cos x + 2\cos9x.\cos x \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,$$

k∈Z.

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 20: (HVQY – 2000): Giải phương trình:

$$\cos^2x + \sin^3x + \cos x = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos^2x + \cos x + \sin^2x.\sin x = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)\cos x + (1 - \cos^2x)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)[\cos x + (1 - \cos x)\sin x] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = -1 & (1) \\ \sin x + \cos x - \sin x.\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được $x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$

Giải (2): Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t - \frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2}\ \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 21: (ĐHCSND – 2000): Giải phương trình:

$$\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x) = \sin 2x + \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\sin 2x = \sin 2x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x - 2)\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Ví dụ 22: Cho phương trình:

$$\sin 4x = m\,\mathrm{tg}x. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 4$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \ne k\pi,\ k \in Z$.

Giải

Điều kiện:

$$\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin 2x.\cos 2x = \frac{m\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 4\sin x.\cos x.\cos 2x.\cos x = m.\sin x$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 x.\cos 2x - m)\sin x = 0 \Leftrightarrow [2(1 + \cos 2x).\cos 2x - m]\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2 2x + 2\cos 2x - m)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos^2 2x + 2\cos 2x - m = 0 \end{array}\right. \underset{|t| \le 1}{\overset{t = \cos 2x}{\Leftrightarrow}} \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 2t^2 + 2t = m \qquad (2) \end{array}\right.$$

Với m = 4, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in Z$$

Vậy với m = 4, phương trình có một họ nghiệm $x = k\pi, k \in Z$.

Để phương trình (1) có nghiệm $x \neq k\pi, k \in Z \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in [-1, 1)$

$\Leftrightarrow$ đường thẳng y = m cắt phần đồ thị hàm số $y = 2t^2 + 2t$ trên phần $[-1, 1)$

Xét hàm số $y = 2t^2 + 2t$ trên $D = [-1, 1)$

Đạo hàm:

$$y' = 4t + 2,\ y' = 0 \Leftrightarrow 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	−∞	−1		−1/2		1	+∞
y'	▨		−	0	+		▨
y	▨	0	↘	−1/2	↗	4	▨

Dựa vào bảng biến thiên, ta được điều kiện là $-\frac{1}{2} \leq m < 4$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. (ĐH Huế – 98): $2\sin^3 x + \cos 2x - \sin x = 0$.

b. (ĐH Đà Nẵng Khối B – 97): $\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$.

c. (HVNH TPHCM – 2000): $\sin^2 x + \cos^3 x + \sin x = 0$.

d. (ĐHHH – 2000): $(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. (Đề 100): $\text{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$.

b. (ĐHTS – 97): $\text{cotg}^2 x = \dfrac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

c. $\text{tg}^2 x = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$.

d. $\text{cotg}^2 x = \dfrac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$.

e. $\text{tg}^2 x = \dfrac{1 + \cos^3 x}{1 + \sin^3 x}$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. (HVNH Hà Nội – 99): $\cos^2 x + \cos^3 x + 2\sin x - 2 = 0$.

b. (ĐHBK TPHCM – 91): $\sin 3x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = 2\cos 2x.\sin x$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{3(\cos 2x + \cot g2x)}{\cot g2x - \cos 2x} - 2\sin 2x = 2$.

b. $\dfrac{\cos x}{\cos 3x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x.\sin 3x$.

Bài tập 5. Giải các phương trình sau:

a. $3tg3x + cotg2x = 2tgx + \dfrac{2}{\sin 4x}$

b. $cotgx - tgx = \sin x + \cos x$

Bài tập 6. Giải các phương trình sau:

a. $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$.

b. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + 2\cos 2x = 0$.

c. (ĐHSP – 97): $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$.

d. $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$.

e. (ĐHQG/TPHCM – 97): $\cos x.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2} - \sin x.\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 7. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$.

b. $\sin^2 x.\cos x - \cos 2x + \sin x - \cos^2 x.\sin x - \cos x = 0$.

Bài tập 8. Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x.\sin 6x = \sin 9x$.

b. $1 + tg2x = \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos^2 2x}$.

Bài tập 9. Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x$.

b. $2\cos 2x - \sin 2x = 2(\sin x + \cos x)$.

Bài tập 10. Giải các phương trình sau:

a. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$.

b. $\sin^2 x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\sin x.\sin^2\dfrac{x}{2} + cotgx = 0$.

Bài tập 11. (ĐHY Hải Phòng – 2000): Tìm x thuộc đoạn [0, 14] nghiệm đúng phương trình:

$$\sin 3x + \sin 2x = 5\sin x.$$

Bài tập 12. Cho phương trình:

$$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x.$$

a. Giải phương trình khi m = 1.

b. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0,\pi]$.

i tập 13. Cho phương trình:

$$4\sin 2x + m\cos x = \cos 3x.$$

a. Giải phương trình: $\sin 2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = \sin x$.

b. Tìm a để phương trình $\sin 2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = a\sin x$ có ít nhất một nghiệm $x \neq k\pi$ $(k \in Z)$.

i tập 14. Cho phương trình:

$$\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0.$$

Xác định m để phương trình có đúng 7 nghiệm thuộc khoảng $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$.

i tập 15. Xác định m để phương trình:

$$m\cos 3x + 4(1 - 2m)\sin^2 x + (7m - 4)\cos x + 8m - 4 = 0$$

đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $(0, 2\pi)$.

ài toán 5: Biến đổi phương trình lượng giác thành tổng các đại lượng không âm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta cần nhớ các đại lượng không âm trong lượng giác, bao gồm:

A^2, $|B|$, $1 \pm \cos x$, $1 \pm \sin x$,

đó để sử dụng phương pháp này giải phương trình lượng giác ta thực hiện eo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = 0. \qquad (1)$$

Bước 2: Dùng lập luận khẳng định $A_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Bước 3: Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ ... \\ A_n = 0 \end{cases}. \qquad (I)$$

Bước 4: Giải hệ (I).

dụ 1: (CĐSP Hà Nội 2000): Giải phương trình:

$$\cos^2 4x + \cos^2 8x = \sin^2 12x + \sin^2 16x + 2.$$

ải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 - \sin^2 4x + 1 - \sin^2 8x = \sin^2 12x + \sin^2 16x + 2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 4x + \sin^2 8x + \sin^2 12x + \sin^2 16x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \sin 8x = 0 \\ \sin 12x = 0 \\ \sin 16x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví du 2: (Đề 32): Giải phương trình:

$$4\cos^2x + 3\text{tg}^2x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\,\text{tg}x + 4 = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\,\text{tg}x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ \text{tg}x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & (2) \end{cases}.$$

- Giải (1) ta được $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$.
- Kiểm tra điều kiện (2)
  - Với $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ta được:

    $$\text{tg}x = \text{tg}(\frac{\pi}{6} + 2k\pi) = \text{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ không thoả mãn.}$$

  - Với $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ta được:

    $$\text{tg}x = \text{tg}(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi) = \text{tg}(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ thoả mãn.}$$

  do đó $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ là nghiệm của phương trình.

Ví du 3: (Đề 131): Giải phương trình:

$$\sin^2x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin^2x - 4\sin x.\sin^2 3x + \sin^4 3x - \sin^4 3x + \sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - \sin^2 3x)^2 + (1 - \sin^2 3x)\sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - \sin^2 3x = 0 \\ (1 - \sin^2 3x)\sin^2 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x \\ \left[\begin{array}{l} \sin^2 3x = 1 \\ \sin^2 3x = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin^2 3x = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin^2 3x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 3\sin x - 4\sin^3 x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z. \\ x = k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

ch 2: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sin^2 x - \sin x.\sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0. \qquad (1)$$

Coi (1) là phương trình bậc 2 theo sinx, ta có:

$$\Delta = \sin^4 3x - \sin^2 3x = (\sin^2 3x - 1)\sin^2 3x \le 0, \forall x$$

đó được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases}\Delta = 0\\ \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin^2 3x = 1\\ \sin^2 3x = 0\end{array}\right.\\ \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin^2 3x = 1\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin^2 3x = 0\\ \sin x = 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = 1\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}3\sin x - 4\sin^3 x = 0\\ \sin x = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{2}\\ \sin x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z.\\ x = k\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

i tập 1. Giải phương trình:

a. (ĐHY Hà Nội – 97): $\cos^4 x + \sin^6 x = \cos 2x$.

b. $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x$.

i tập 2. (Đề 83): Giải phương trình:

$$\cos 2x - \cos 6x + 4(3\sin x - 4\sin^3 x + 1) = 0.$$

i tập 3. Giải phương trình:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4}.$$

i tập 4. Giải phương trình:

$$tg^2 x + tg^2 y + cotg^2(x + y) = 1.$$

i tập 5. Giải phương trình:

$$x^2 - 2x.\sin xy + 1 = 0.$$

ài toán 6: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta đánh giá phương trình dựa trên các dạng:

Dạng 1: Tính chất của các hàm số lượng giác và biểu thức lượng giác.

Dạng 2: Phương trình lượng giác dạng Pitago.

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Dạng 4: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

Sau đây ta sẽ đi xét từng dạng.

1. Tính chất của các hàm số lượng giác và biểu thức lượng giác

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 3x = 2.$$

Giải

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} |\sin x + \sqrt{3}\cos x| \le 2 \\ |\sin 3x| \le 1 \end{cases} \Rightarrow |(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 3x| \le 2$$

do đó phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = -2 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{3}) = -1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 2: (ĐHD 2000): Giải phương trình:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x.\cos 2x.\cos 3x + 2.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x).\cos 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x = \cos^2 3x + \cos x.\cos 3x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x = \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + 4$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 3 \qquad (*)$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \cos 2x \le 1 \\ \cos 4x \le 1 \\ \cos 6x \le 1 \end{cases} \Rightarrow VT = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x \le 3$$

lo đó phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\cos 2x = 1\\ \cos 4x = 1\\ \cos 6x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x = 1\\ 2\cos^2 2x - 1 = 1\\ 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Vhận xét: Trong ví dụ trên bằng phương pháp biến đổi tích thành tổng chúng ta tã chuyển phương trình ban đầu về dạng để đánh giá, điều đó khẳng định rằng ıầu hết các phương trình lượng giác ở dạng ban đầu chúng ta chưa thể khẳng tịnh được rằng nó có thuộc loại đánh giá hay không. Tất cả chỉ được khẳng tịnh sau những biến đổi lượng giác mà chúng ta đã biết.

Ví dụ 3: (ĐHNT Hà Nội – 2000): Giải phương trình:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x.$$

Jiải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - 2\sin^2 x)\sin^8 x - (2\cos^2 x - 1)\cos^8 x = \frac{5}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\sin^8 x - \cos 2x.\cos^8 x = \frac{5}{4}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (\sin^8 x - \cos^8 x)\cos 2x = \frac{5}{4}\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos 2x = 0 & (1)\\ \sin^8 x - \cos^8 x = \frac{5}{4} & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$$

Giải (2): Ta có nhận xét:

$VT = \sin^8 x - \cos^8 x \le \sin^8 x \le 1 \Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 4: (ĐHNT Hà Nội – 95): Giải phương trình:

$$4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1.$$

Jiải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\cos x - 2\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 1 \Leftrightarrow 2\cos x - (1 + \cos 2x)\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x - 2\cos^2 x.\cos 2x = 0 \Leftrightarrow (1 - \cos x.\cos 2x)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - \cos 3x - \cos x)\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x = 0 & (1)\\ \cos 3x + \cos x = 2 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in Z.$$

Giải (2): Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\cos 3x \le 1\\ \cos x \le 1\end{cases} \Rightarrow VT = \cos 3x + \cos x \le 2$$

do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x = 1\\ \cos x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\cos^3 x - 3\cos x = 1\\ \cos x = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Ví dụ 5: (HVCNBCVT – 98): Giải phương trình:

$$\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4(\sin x - \cos x).$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 4x - (1 + \cos 4x) = 4(\sin x - \cos x) \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x - 2\cos^2 2x = 4(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin 2x - \cos 2x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 4(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[(\sin 2x - \cos 2x)(\cos x + \sin x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x - \sin x = 0 & (1)\\ (\sin 2x - \cos 2x)(\cos x + \sin x) + 2 = 0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được:

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$$

Giải (2): Ta có:

$$2\sin(2x - \frac{\pi}{4}).\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -2 \Leftrightarrow \sin 3x + \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -2$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x - \cos x = -2.$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\sin 3x \ge -1\\ -\cos x \ge -1\end{cases} \Rightarrow VT = \sin 3x - \cos x \ge 2$$

do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 3x = -1\\ -\cos x = -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin 3x = -1\\ \sin x = 0\end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Chú ý: Có thể giải (2) bằng cách:

Ta có:

$$\begin{cases}|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}\\ |\cos 2x - \sin 2x| \le \sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow |(\sin x + \cos x)(\cos 2x - \sin 2x)| \le 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x+\cos x=\sqrt{2}\\ \cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\\ \cos 2x-\sin 2x=-\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{3\pi}{8}+k\pi\end{cases}\end{array}\right. \text{ vô nghiệm.}$$

. Phương trình lượng giác dạng Pitago

í dụ 6: (Đề 109): Giải phương trình:

$$\frac{1}{4}(\sin^{10}x+\cos^{10}x)=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^2 2x+4\cos^2 2x}. \qquad (1)$$

iải

Ta có nhận xét:

$$VP=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x.\cos^2 x}{4(\sin^2 2x+\cos^2 2x)-3\sin^2 2x}=\frac{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}{4-3\sin^2 2x}=\frac{1}{4}.$$

Mặt khác

$$\begin{cases}\cos^{10}x\le\cos^2 x\\ \sin^{10}x\le\sin^2 x\end{cases}\Rightarrow VT=\frac{1}{4}(\sin^{10}x+\cos^{10}x)\le\frac{1}{4}(\cos^2x+\sin^2x)=\frac{1}{4}$$

o đó:

$$(1)\Leftrightarrow VT=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^{10}x=\cos^2 x\\ \sin^{10}x=\sin^2 x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\pm1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\pm1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

hú ý: Việc mở rộng phương trình lượng giác dạng Pitago bằng cách nhúng hêm vào đó những toán tử khác để rồi đánh giá chúng bằng những nhận xét hác là điều thường gặp. Chúng ta xem xét ví dụ sau:

í dụ 7: (ĐHNN I – 2000): Giải phương trình:

$$\cos^5x+\sin^5x+\sin2x+\cos2x=1+\sqrt{2}. \qquad (1)$$

iải

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}\cos^5 x\le\cos^2 x\\ \sin^5 x\le\sin^2 x\end{cases}\Rightarrow\cos^5x+\sin^5x\le\cos^2x+\sin^2x=1,$$

$$\sin2x+\cos2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$$

suy ra:

$$VT = \cos^5x + \sin^5x + \sin2x + \cos2x \le 1 + \sqrt{2}$$

do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^5 x = \cos^2 x \\ \sin^5 x = \sin^2 x \\ \sin(2x + \dfrac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^5 x = \cos^2 x \\ \sin^5 x = \sin^2 x \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

3. Sử dụng bất đẳng thức Côsi

Ví dụ 8: (HVQY – 97): Giải phương trình:

$$\sin^82x + \cos^82x = \frac{1}{8}. \qquad (1)$$

Giải

Cách 1: Sử dụng phương pháp giải phương trình lượng giác hỗn hợp chứa các biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^82x + \cos^82x &= (\sin^42x + \cos^42x)^2 - 2\sin^42x.\cos^42x \\ &= [(\sin^22x + \cos^22x)^2 - 2\sin^22x.\cos^22x]^2 - 2\sin^42x.\cos^42x \\ &= (1 - \frac{1}{2}\sin^24x)^2 - \frac{1}{8}\sin^44x = \frac{1}{8}\sin^44x - \sin^24x + 1. \end{aligned}$$

Do đó phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{1}{8}\sin^44x - \sin^24x + 1 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin^44x - 8\sin^24x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 4x = 1 \\ \sin^2 4x = 1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k\in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Côsi

Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \cos^8 2x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \overset{\text{Côsi}}{\ge} \dfrac{1}{2}\cos^2 2x \\ \sin^8 2x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \overset{\text{Côsi}}{\ge} \dfrac{1}{2}\sin^2 2x \end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} \sin^82x + \cos^82x + 6.\left(\frac{1}{2}\right)^4 \ge \frac{1}{2}(\sin^22x + \cos^22x) \Leftrightarrow \sin^82x + \cos^82x \ge \frac{1}{8}$$

do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^8 2x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \\ \sin^8 2x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \cos^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 9: (Đề 77): Với $2 \le n \in N$, giải phương trình:

$$(tgx + \frac{1}{4}cotgx)^n = \sin^n x + \cos^n x \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \sin x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow 2x \ne k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in Z. \qquad (*)$$

Ta có nhận xét:

$$|VT| = |(tgx + \frac{1}{4}cotgx)^n| = (|tgx| + \frac{1}{4}|cotgx|)^n \overset{Côsi}{\ge} (2\sqrt{\frac{1}{4}|tgx|.|cot gx|})^n = 1$$

$$\begin{cases} \cos^n x \le \cos^2 x \\ \sin^n x \le \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow VP = \sin^n x + \cos^n x \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} VT = VP = 1 \\ VT = VP = -1 \end{array}\right. \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} VT = 1 \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgx = \dfrac{1}{4}cot gx \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg^2 x = \dfrac{1}{4} \\ n = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tgx = \pm\dfrac{1}{2} = \pm tg\alpha \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\alpha + k\pi \\ n = 2 \end{cases}, k \in Z.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm và với n = 2.

4. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

Ví dụ 10: (Đề 146): Giải phương trình:

$$\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x.\sqrt{2 - \sin^2 x} = 3.$$

Giải

Ta có:

$$VT^2 = (1.\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}.1 + \sin x.\sqrt{2 - \sin^2 x})^2$$
$$\le (1 + 2 - \sin^2 x + \sin^2 x)(\sin^2 x + 1 + 2 - \sin^2 x) = 9$$
$$\Rightarrow VT \le 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

Ví dụ 11: (ĐHAN): Giải phương trình:

$$2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x.\sin x. \qquad (1)$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(\cos x - \cos 28x\sin x) = \sqrt{2}(3 - \sin 10x)$$

Ta có:

$$VT \le 2.\sqrt{1 + \cos^2 28x} \le 2\sqrt{2}.$$

$$VP \ge \sqrt{2}(3 - 1) = 2\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} VT = 2\sqrt{2} \\ VP = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 28x = 1 \\ \sin 10x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 28x = 0 \\ \sin 10x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(20x + 8x) = 0 \\ \sin 10x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 8x = 0 \\ \cos 8x.\sin 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. (Đề 130): Giải phương trình:

$$\cot g3x + \cot g2x + \frac{1}{\sin 3x.\sin 2x.\sin x} = 0.$$

Bài tập 2. (HVKTQS – 98): Giải phương trình:

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0.$$

Bài tập 3. (Đề 94): Giải phương trình:

$$\cos^3 x + \sin^3 x = 2 - \sin^4 x.$$

Bài tập 4. Giải các phương trình:

a. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$.

b. $\sin 2x.\cos 8x = 1$.

c. $\sin^3 x + \cos^3 x = (2 - \sin^4 x)$.

d. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$.

e. $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$.

f. $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x.\ \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

Bài tập 5. Giải các phương trình:

a. $\sin^2 2x - tg^2 x = \frac{9}{2}\cos 2x$.

b. $\frac{\sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 3x}$.

c. $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$.

Bài tập 6. Giải các phương trình:

a. $7\cos^2 x + 1995\sin^{1994} x = 1995$.

b. (Đề 94): $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$.

c. $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$.

d. $\sin^{2000} x + \cos^{2000} x = 1$.

Bài tập 7. Giải các phương trình:

a. (Đề 83): $(\sin^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}})^2 + (\cos^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^3\frac{x}{2}})^2 = \frac{81}{4}\cos^2 4x$.

b. $\left(tgx + \frac{1}{4}\cot gx\right)^n = \cos^n x + \sin^n x$, với $n \in N, n \geq 2$.

Bài tập 8. Giải các phương trình:

a. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$.

b. $\cos x = 1 + x$.

c. $\sin x + tgx - 2x = 0$, với $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

d. $x - \sin\frac{\pi}{3}(x + 1)\sin\frac{\pi(1 - x)}{3} = 0$ với $x \in [0,1]$

Bài tập 9. Giải các phương trình:

a. $x^2 - 2x.\sin xy + 1 = 0$.

b. $12\sin x + 5\cos x = 2y^2 - 8x + 21$.

c. $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$.

d. $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y$.

Bài tập 10. Giải các phương trình:

a. $(2m + 1)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) + 2m^2 + 2m + 2 = 0$.

b. $2m^2 - 2m(\cos x + \sin x) + \frac{3}{2} = \cos x - \sin x$.

Bài tập 11. (Đề 74): Tìm a để phương trình có nghiệm:

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) + 7 + \sin 3x.$$

CHỦ ĐỀ 13

PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ, HAI PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Xác định tham số để phương trình này là hệ quả của phương trình kia.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hai phương trình:

$$f(x, m) = 0 \qquad (1)$$

$$g(x, m) = 0 \qquad (2)$$

Xác định tham số để phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2) (nói cách khác "*để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2)*").

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Điều kiện cần*:

- Giải và tìm nghiệm $x = x_0$ của (1).
- Để phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2), trước hết cần $x = x_0$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$g(x_0, m) = 0 \Rightarrow m = m_0.$$

- Vậy $m = m_0$ chính là điều kiện cần.

Bước 2: *Điều kiện đủ*:

- Với $m = m_0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của (1)}$$

$$(2) \Leftrightarrow g(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của (2)}$$

- Kết luận.

Ví dụ 1: Cho hai phương trình:

$$1 + \text{tg}x = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}. \qquad (1)$$

$$m(1 + \sin x) - \sin 2x = m^2. \qquad (2)$$

Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Giải

Trước hết ta đi giải (1), điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 + \sin x) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x + \cos x.\sin x + \sin^2 x = \cos x \Leftrightarrow (1 + \cos x + \sin x)\sin x = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x + \cos x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ (loại)}\\ x = \pi + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi,\ k\in Z.$$

Do đó để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) điều kiện là $x = k\pi$, $\in Z$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$m(1 + \sin k\pi) - \sin 2k\pi = m^2 \Leftrightarrow m = m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 0\\ m = 1\end{array}\right..$$

Vậy với m = 0 hoặc m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

hận xét: Như vậy trong lời giải của bài toán trên ta đã không sử dụng mẫu hương pháp điều kiện cần và đủ bởi các lý do sau:

1 Phương trình (1) không chứa tham số.

2 Dễ dàng tìm được tất cả các nghiệm của (1) và phép thử các nghiệm đó vào (2) đơn giản.

Trong những trường hợp một trong các lý do trên bị vi phạm các em học inh nên thực hiện đúng mẫu điều kiện cần và đủ để giải.

Trong trường hợp (1) có chứa tham số ta cần chỉ ra được một nghiệm tường ninh của (1) để tìm được điều kiện cần cho m. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

í dụ 2: (Đề 42): Cho hai phương trình:

$$\sin x + m.\cos x = 1 \qquad (1)$$

$$m.\sin x + \cos x = m^2. \qquad (2)$$

Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

iải

iều kiện cần: Nhận xét rằng với mọi m, (1) luôn có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k\in Z$.

Do đó để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2) trước hết cần $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\in Z$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$m.\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = m^2 \Leftrightarrow m = m^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 0\\ m = 1\end{array}\right..$$

Đó chính là điều kiện cần của m.

Điều kiện đủ:

- Với m = 0, ta được:

  $(1) \Leftrightarrow \sin x = 1$

  $(2) \Leftrightarrow \cos x = 0$

  suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

- Với m = 1, ta được:

  $(1), (2) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Vậy với m = 0 hoặc m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Tồn tại những bài toán mà không thể chỉ ra được dạng nghiệm tườn minh cho phương trình (1) khi đó ta cần đánh giá thông qua tính chất nghiệm của các phương trình lượng giác, thí dụ như phương trình sinx = m có nghiệm x thì cũng nhận $\pi - x_0$ làm nghiệm, khi đó bằng cách thay vào (2) cả x_0 và $\pi - x$ ta sẽ tìm được điều kiện cần cho tham số. Cụ thể ta đi xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho hai phương trình:

$$\cos(x + y) = a \qquad (1)$$

$$\sin(x + y) = b. \qquad (2)$$

Tìm a, b để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Giải

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng nếu (x_0, y_0) là nghiệm của (1) thì $(-x_0, -y_0)$ cũng là nghiệm của (1), do đó để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của phương trình (2) trướ hết cần (x_0, y_0) và $(-x_0, -y_0)$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$\begin{cases}\sin(x_0 + y_0) = b\\ \sin(-x_0 - y_0) = b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x_0 + y_0) = b\\ -\sin(x_0 + y_0) = b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = 0\\ \sin(x_0 + y_0) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b = 0\\ x_0 + y_0 = k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b = 0\\ \cos k\pi = a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = 0\\ |a| = 1\end{cases}.$$

Đó chính là điều kiện cần của a và b.

Điều kiện đủ:

- Với a = 1 & b = 0, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \cos(x + y) = 1$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin(x + y) = 0$$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

- Với a = − 1 & b = 0, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \cos(x + y) = -1$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin(x + y) = 0$$

suy ra mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của (2).

Vậy với a = 1 & b = 0 hoặc a = − 1 & b = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài toán 2: Xác định tham số để hai phương trình lượng giác tương đương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hai phương trình:

$$f(x, m) = 0 \qquad (1)$$

$$g(x, m) = 0 \qquad (2)$$

Xác định tham số để (1) và (2) tương đương.

Ta lựa chọn theo hai hướng sau:

Hướng 1: Nếu (1) & (2) đều giải được.

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giải (1) để tìm tập nghiệm D_1.

Giải (2) để tìm tập nghiệm D_2.

Bước 2: Thiết lập điều kiện để $D_1 = D_2$.

Hướng 2: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ

Bước 1: ***Điều kiện cần:***

- Giải và tìm nghiệm $x = x_0$ của (1).
- Để phương trình (1) & (2) tương đương, trước hết cần $x = x_0$ cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$g(x_0, m) = 0 \Rightarrow m = m_0.$$

- Vậy $m = m_0$ chính là điều kiện cần.

Bước 2: ***Điều kiện đủ:***

- Với $m = m_0$

$$(1) \Leftrightarrow f(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của (1)}$$

$$(2) \Leftrightarrow g(x, m_0) = 0 \Rightarrow \text{nghiệm của (2)}$$

- Kết luận.

í dụ 4: (Đề 10): Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$2\cos 2x.\cos x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \qquad (1)$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = m\cos x + (4 - m)(1 + \cos 2x). \qquad (2)$$

iải

Giải (1): Ta được:

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Giải (2): Ta được:

$$4\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) = m\cos x + 2(4 - m)\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 2(m - 2)\cos^2 x + (m - 3)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow [4\cos^2 x - 2(m - 2)\cos x + (m - 3)]\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow [4\cos x - 2(m - 3)](\cos x - \frac{1}{2})\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{m-3}{2}\end{array}\right..$$

Vậy để (1) và (2) tương đương điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{m-3}{2}=0\\ \dfrac{m-3}{2}=\dfrac{1}{2}\\ \left|\dfrac{m-3}{2}\right|>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=4\\ m<1\\ m>5\end{array}\right..$$

Vậy với $\in(-\infty, 1)\cup(5, +\infty)\cup\{3, 4\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 5: (Đề 10): Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$\sin x.\cos 2x = \sin 2x.\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 5x. \qquad (1)$$

$$m.\cos 2x + |m|.\cos 4x + \cos 6x = 1. \qquad (2)$$

Giải

Điều kiện cần

Giải (1): Ta được:

$$\frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) - \frac{1}{2}\sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k\in Z.$$

Do đó (1) & (2) tương đương trước hết cần x = 0 (là một nghiệm của họ $x = \frac{k\pi}{3}$) cũng là nghiệm của (2), tức là:

$$m.\cos 0 + |m|.\cos 0 + \cos 0 = 1 \Leftrightarrow m + |m| = 0 \Leftrightarrow m\le 0.$$

Đó chính là điều kiện cần của a và b.

Điều kiện đủ

- Với m = 0, ta được:

  $$(2) \Leftrightarrow \cos 6x = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k\in Z$$

  Vậy m = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.
- Với m < 0, ta được:

  $$(2) \Leftrightarrow m.\cos 2x - m.\cos 4x + \cos 6x = 1$$

  $$\Leftrightarrow \cos 6x - 1 - m(\cos 4x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 3x + 2m\sin 3x.\sin x = 0$$

  $$\Leftrightarrow (\sin 3x - m\sin x)\sin 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ 3\sin x - 4\sin^3 x - m.\sin x = 0\end{array}\right.$$

  $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = k\pi\\ 4\sin^2 x - m + 3 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{3}\\ \sin^2 x = \dfrac{3-m}{4} \quad (3)\end{array}\right.$$

Từ đó để (2) chỉ có nghiệm $x = \frac{k\pi}{3}$, thì điều kiện là (3) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3-m}{4}<0\\ \frac{3-m}{4}>1\end{array}\right. \overset{m<0}{\Leftrightarrow} \frac{3-m}{4}<1 \Leftrightarrow m<-1.$$

Vậy với $m = 0$ hoặc $m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

ài tập 1. Tìm giá trị của m để hai phương trình tương đương:

$$\cos 2x + \sin x - 1 = 0,$$

$$m\sin 3x + (m-2)\cos 2x - (m+2)\sin x + 2 - m = 0.$$

ài tập 2. Tìm giá trị của m để hai phương trình tương đương:

$$2\cos x.\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x,$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4-a)(1+\cos 2x).$$

ài tập 3. Tìm giá trị của m để hai phương trình tương đương:

$$\cos 3x = 4\cos(3\pi + x),$$

$$m\cos^2 x + (1-m)\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$$

ài tập 4. (Đề 40): Tìm m để hai phương trình sau tương đương:

$$3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x.\sin 2x,$$

$$m.\cos 3x + (4-8m)\sin^2 x + (7m-4)\cos x + 8m - 4 = 0.$$

ài tập 5. (Đề 117): Tìm a, b để hai phương trình sau tương đương:

$$a.\sin 2x + \sqrt{2} = 2\cos x + a\sqrt{2}\sin x,$$

$$2\sin^2 x + \cos 2x + \sin 2x + b = 2b\sin x + \cos x + 1.$$

ài tập 6. Xác định a, b để hai phương trình sau tương đương:

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x.\cos 2x,$$

$$\sin 3x = a\mathrm{inx} + (4 - 2a)\sin^2 x.$$

ài tập 7. Xác định a, b để hai phương trình sau tương đương:

$$a\sin 2x - 2\sqrt{3} = a\sqrt{3}\cos x - 4\sin x,$$

$$\sin 2x + \cos 2x + b\sqrt{2} + 1 = \sqrt{2}\sin x + 2\cos x(\cos x + b)$$

CHƯƠNG II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ 1

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) \pm f(y) = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} tgx \pm tgy = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \cot gx \pm \cot gy = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

Ta chuyển tổng f(x)±f(y) = m thành tích bằng một trong các công thức:

- $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$
- $tgx \pm tgy = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x.\cos y}$
- $cotgx \pm cotgy = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x.\sin y}$

Chú ý: Phương pháp chung là nếu biết tổng x + y thì cần tìm hiệu x − y ha ngược lại, bằng các công thức biến đổi, tức là:

- Ta đi biến đổi phương trình:

$$f(x) \pm f(y) = m \Leftrightarrow g_1(x+y).g_2(x-y) = m_1. \qquad (*)$$

- Từ đó thay phương trình x±y = α vào (*) để tìm biểu thức còn lại.

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = m & (1) \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

a. Giải hệ với m = 1.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = m \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{x-y}{2} = m \Leftrightarrow \cos\frac{x-y}{2} = m. \quad (3)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 2k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} - 2k\pi \end{cases}, k \in Z$$

b. Hệ có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow |m| \le 1$.

Vậy với $|m| \le 1$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ x - y = -\dfrac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$$

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2\sin(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4}).\cos(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sin\frac{\pi}{8}.\cos(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (3)$$

Ta có:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$= 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{8} + 2k\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y = \dfrac{3\pi}{4} + 4k\pi \\ x+y = \dfrac{\pi}{4} + 4k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y = \dfrac{3\pi}{4} + 4k\pi \\ x-y = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{4} + 4k\pi \\ x-y = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \end{array}\right., k\in Z.$$

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} tgx - tgy = m & (1) \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4} & (2) \end{cases}$$

a. Giải hệ với m = 2.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \quad k, l\in Z.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y} = m \Leftrightarrow \sin(x-y) = \frac{m}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\sin(x-y) - m\cos(x-y) = -\frac{m\sqrt{2}}{2}. \qquad (3)$$

a. Với m = 2, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow \sin(x-y) - \cos(x-y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - y - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - y - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - y - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x - y = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{array}\right. .$$

$$k \in Z$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x + y = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \\ x + y = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{3} - k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{13\pi}{12} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} - k\pi \end{cases} \end{array}\right. , k \in Z$$

). Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \text{(3) có nghiệm} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 4 + m^2 \geq \frac{m^2}{2} \Leftrightarrow 8 + m^2 \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy hệ có nghiệm với mọi m.

Bài toán 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x).g(y) = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x.\sin y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x.\cos y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} tgx.tgy = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

Ta chuyển tích f(x).g(y) = m thành tổng bằng một trong các công thức:

- $\sin x.\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$
- $\cos x.\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$
- $\sin x.\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$
- $\cos x.\sin y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y$.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \text{tgx.tgy} = m & (1) \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

a. Giải hệ với m = 3.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in Z.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin y}{\cos y} = m \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] = \frac{m}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos(x-y) - \cos\frac{\pi}{3} = m[\cos\frac{\pi}{3} + \cos(x-y)] \Leftrightarrow (1-m)\cos(x-y) = \frac{m+1}{2} \quad (3$$

a. Với m = 3, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow -2\cos(x-y) = 2 \Leftrightarrow \cos(x-y) = -1 \Leftrightarrow x - y = \pi + 2k\pi, k \in Z$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x - y = \pi + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} - k\pi \end{cases}, k \in Z.$$

b. Ta xét hai trường hợp:

- Với $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$, khi đó:

  $(3) \Leftrightarrow 0 = 1$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

- Với $1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

  Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(x-y) = \frac{m+1}{2(1-m)}. \quad (4)$$

Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (4) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \left|\frac{m+1}{2(1-m)}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq \dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Vậy với $m \in (-\infty, \frac{1}{3}] \cup [3, +\infty)$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x.\sin y = m & (1) \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m = \dfrac{1}{2}$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Giải

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] = m \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos\frac{\pi}{3} - \cos(x+y) = 2m$$

- $\Leftrightarrow \cos(x+y) = \dfrac{1-4m}{2}$. (3)

a. Với $m = \dfrac{1}{2}$, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z.$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \end{array}\right., k \in Z$$

b. Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (3) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \left|\frac{1-4m}{2}\right| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}.$$

Vậy với $-\dfrac{1}{4} \le m \le \dfrac{3}{4}$ hệ có nghiệm.

Bài toán 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)}{f(y)} = m & (1) \\ x \pm y = \alpha & (2) \end{cases}$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện cho $f(y) \neq 0$.

Bước 2: Biến đổi (1) dựa vào phương pháp luận hệ số để làm xuất hiện (2) và biểu thức còn lại.

Bước 3: Tìm nghiệm của hệ.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2 & (1) \\ 3(x+y) = 2\pi & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $\sin y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq k\pi,\ k \in Z$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin x = 2\sin y \Leftrightarrow 2\sin x = 4\sin y \Leftrightarrow 3(\sin x - \sin y) = \sin x + \sin y$$

$$\Leftrightarrow 6\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3\cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{x-y}{2} = \sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} - k\pi \end{cases},\ k \in Z$$

II. CÁC BÀI TOÁN THI

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos(\pi x).\cos(\pi y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ x - y = -\dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

BÀI GIẢI

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{1}{2}\{\cos[\pi(x+y)] + \cos[\pi(x-y)]\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos[\pi(x+y)] + \cos(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos[\pi(x+y)] = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \pi(x+y) = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x + y = \pm\frac{1}{4} + 2k$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=\dfrac{1}{4}+2k\\[2ex] x-y=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\\[5ex] \begin{cases}x+y=-\dfrac{1}{4}+2k\\[2ex] x-y=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=k\\[1ex] y=\dfrac{1}{4}+k\end{cases}\\[4ex] \begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}+k\\[1ex] y=k\end{cases}\end{array}\right., k\in Z.$$

Bài 2: (ĐHKT TPHCM – 93): Giải và biện luận theo α hệ phương trình:

$$\begin{cases}2(\cos 2x+\cos 2y)=1+4\cos^2(x-y) & (1)\\ x-y=\alpha & (2)\end{cases}$$

BÀI GIẢI

Biến đổi (1) về dạng:

$$4\cos(x+y).\cos(x-y)=1+4\cos^2(x-y)\Leftrightarrow 4\cos(x+y).\cos\alpha=1+4\cos^2\alpha \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow [\cos(x+y)-2\cos\alpha]^2+\sin^2(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(x+y)-2\cos\alpha=0\\ \sin^2(x+y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos(x+y)=1\\ 2\cos\alpha=1\end{cases}\\[3ex] \begin{cases}\cos(x+y)=-1\\ 2\cos\alpha=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=2k\pi\\ \alpha=\pm\dfrac{\pi}{3}+2l\pi\end{cases}\\[4ex] \begin{cases}x+y=\pi+2k\pi\\ \alpha=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2l\pi\end{cases}\end{array}\right.,$$

K; l∈Z.

- Với $\alpha=\dfrac{\pi}{3}+2l\pi, l\in Z$, hệ có dạng:

$$\begin{cases}x+y=2k\pi\\[1ex] x-y=\dfrac{\pi}{3}+2l\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+(k+l)\pi\\[2ex] y=-\dfrac{\pi}{6}+(k-l)\pi\end{cases}, k; l\in Z.$$

- Với $\alpha=-\dfrac{\pi}{3}+2l\pi, l\in Z$, hệ có dạng:

$$\begin{cases}x+y=2k\pi\\[1ex] x-y=-\dfrac{\pi}{3}+2l\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}+(k+l)\pi\\[2ex] y=\dfrac{\pi}{6}+(k-l)\pi\end{cases}, k; l\in Z.$$

- Với $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l \in Z$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 2k\pi \\ x - y = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + (k + l)\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} + (k - l)\pi \end{cases}, k; l \in Z.$$

- Với $\alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l \in Z$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 2k\pi \\ x - y = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + (k + l)\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + (k - l)\pi \end{cases}, k; l \in Z.$$

- Ngoài ra hệ vô nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x + . \sin y = 3/2 \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$.　　b. $\begin{cases} \sin x . \sin y = \sqrt{3}/2 \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$.

Bài tập 2. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \text{tg}x + \text{tg}y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$.　　b. $\begin{cases} x + y = \pi/3 \\ \frac{\sin x}{\sin y} = -2 \end{cases}$.

Bài tập 3. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 2m \\ x - y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

a. Giải hệ với m = − 1.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 4. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x . \sin y = 2m \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

a. Giải hệ với m = 1.
b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 5. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \text{tg}x.\text{tg}y = m \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

a. Giải hệ với m = 3.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 6. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 2m + 1 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình khi $m = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

b. Xác định m để hệ trên có nghiệm.

Bài tập 7. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \text{tg}x + \text{tg}y = b \end{cases}.$$

a. Giải hệ trên khi $a = \dfrac{5\pi}{12}$; $b = 2$.

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm

Bài tập 8. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\cos 6x - \cos 2y = a \\ 3x - 2y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

a. Giải hệ khi a = −3.

b. Xác định a để hệ có nghiệm.

Bài tập 9. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x . \sin y = b \end{cases}.$$

Tìm b để hệ có nghiệm với mọi a tìm nghiệm đó.

Bài tập 10. Giải và biện luận hệ phương trình

a. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = m \\ x + y = 2\pi \end{cases}$.

c. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos\alpha \\ x + y = \alpha \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = m \\ x + y = \alpha \end{cases}$.

d. $\begin{cases} x + y = a \\ 2(\sin^2 x + \sin^2 y) = 2 - \sin 2a \end{cases}$.

Bài tập 11. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin^2 x . \sin^2 y = b \end{cases}.$$

Bài tập 12. (ĐHQG TPHCM Khối D – 99): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ 2\sin^2 x + 2\cos^2 y = 2m + 1 \end{cases}.$$

a. Giải hệ với m = 0.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

CHỦ ĐỀ 2

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

I. PHƯƠNG PHÁP

Bài toán 1: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hệ dạng:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Ta sử dụng phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0 \\ f(x,y)-g(x,y)=0 \end{cases}$$

từ đó sử dụng được các công thức lượng giác, thông thường là công thức cộng.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x.\sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Giải

Biến đổi tương đương hệ bằng cách cộng và trừ vế với vế hai phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y + \cos x.\sin y = 0 \\ \sin x.\cos y - \cos x.\sin y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y)=0 \\ \sin(x-y)=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=k\pi \\ x-y=-\dfrac{\pi}{2}+2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4}+(\dfrac{k}{2}+l)\pi \\ y=\dfrac{\pi}{4}+(\dfrac{k}{2}-l)\pi \end{cases}, k, l\in Z.$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin^4 x = \cos x.\cos y \\ \cos^4 x = \sin x.\sin y \end{cases}.$$

Giải

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y \\ \sin^4 x - \cos^4 x = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x = \cos(x-y) \\ -\cos 2x = \cos(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+\cos 4x = 4\cos(x-y) & (1) \\ \cos 2x = \cos(\pi - x - y) & (2) \end{cases}$$

Giải (2), ta được:

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \pi - x - y + 2k\pi \\ 2x = -\pi + x + y + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 4x - \pi - 2k\pi \\ x - y = -\pi + 2k\pi \end{array}\right., k\in Z.$$

- Với $x - y = 4x - \pi - 2k\pi$, thay vào (1) ta được:

$$3 + \cos4x = 4\cos(4x - \pi - 2k\pi) \Leftrightarrow 3 + \cos4x = -4\cos4x$$

$$\Leftrightarrow \cos4x = -\frac{3}{5} = \cos4\alpha \Leftrightarrow 4x = \pm4\alpha + 2l\pi \Leftrightarrow x = \pm\alpha + \frac{l\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \dfrac{l\pi}{2}\ \ \&\ \ y = \pi - 3\alpha + (2k - \dfrac{3l}{2})\pi \\ x = -\alpha + \dfrac{l\pi}{2}\ \ \&\ \ y = \pi + 3\alpha + (2k - \dfrac{3l}{2})\pi \end{array}\right., l\in Z.$$

- Với $x - y = \pi + 2k\pi$, thay vào (1) ta được:

$$3 + \cos4x = 4\cos(\pi + 2k\pi) \Leftrightarrow 3 + \cos4x = -4$$

$$\Leftrightarrow \cos4x = -7 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = \alpha + \dfrac{l\pi}{2}\ \ \&\ \ y = \pi - 3\alpha + (2k - \dfrac{3l}{2})\pi \\ x = -\alpha + \dfrac{l\pi}{2}\ \ \&\ \ y = \pi + 3\alpha + (2k - \dfrac{3l}{2})\pi \end{array}\right., l\in Z.$$

í dụ 3: **Cho hệ phương trình:**

$$\begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ 3\text{tg}x = \text{tg}y \end{cases}.$$

a. (Đề 12): Giải hệ phương trình với $m = \dfrac{1}{4}$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

iải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k; l\in Z. \qquad (*)$$

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases}\sin x.\cos y = m\\ 3\sin x.\cos y = \sin y.\cos x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x.\cos y = m\\ \sin y.\cos x = 3m,\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x.\cos y + \cos x.\sin y = m\\ \sin x.\cos y - \cos x.\sin y = -2m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x+y) = 4m\\ \sin(x-y) = -2m\end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

a. Với $m = \frac{1}{4}$, ta được:

$$\begin{cases}\sin(x+y) = 1\\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + y = k\pi\\ \left[\begin{array}{l}x - y = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi\\ x - y = \frac{7\pi}{6} + 2l\pi\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{12} + \frac{(k+2l)\pi}{2} \ \& \ y = \frac{\pi}{12} + \frac{(k-2l)\pi}{2}\\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{(k+2l)\pi}{2} \ \& \ y = -\frac{7\pi}{12} + \frac{(k-2l)\pi}{2}\end{array}\right., \text{ k; l} \in Z \text{ thoả mãn (*)}.$$

b. Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m \neq 0\\ \text{(I) có nghiệm}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \neq 0\\ |4m| \leq 1\\ |-2m| \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow m \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \setminus \{0\}.$$

Vậy với $m \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \setminus \{0\}$ hệ có nghiệm.

Bài toán 2: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phép khử sau khi bình phương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1 Với hệ dạng:

$$\begin{cases}\sin x = f(y) & (1)\\ \cos x = g(y) & (2)\end{cases}$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bình phương (1) và (2) rồi cộng lại để thu được phương trình h quả:

$$f^2(y) + g^2(y) = 1 \qquad (3)$$

Bước 2: Giải (3) để nhận được y, rồi thay vào (1) và (2) để thu được x.

Chú ý: Nếu ta chỉ dùng (1) hoặc (2) để tính x, ta có thể thu được nghiệm ngoạ lai, vì ở bước 1 ta đã thực hiện một phép biến đổi không tương đương.

2 Với hệ dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} = f(y) & (1) \\ \operatorname{tg}x = g(y) & (2) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} = f(y) & (1) \\ \cot gx = g(y) & (2) \end{cases}$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bình phương (1) và (2) rồi trừ theo vế để thu được phương trình hệ quả:

$$f^2(y) - g^2(y) = 1 \qquad (3)$$

Bước 2: Giải (3) để nhận được y, rồi thay vào (1) và (2) để thu được x.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\sin x = \sin y & (1) \\ 2\cos x + \cos y = 1 & (2) \end{cases}.$$

Giải

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2\sin x = \sin y \\ 2\cos x + \cos y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin x = \sin y \\ 2\cos x = 1 - \cos y \end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} 4 = 2 - 2\cos y \Leftrightarrow \cos y = -1 \Leftrightarrow y = \pi + 2k\pi,\ k\in Z. \qquad (3)$$

Thay (3) vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} 2\sin x = \sin(\pi + 2k\pi) \\ 2\cos x + \cos(\pi + 2k\pi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2l\pi,\ l\in Z.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x = 2l\pi \\ y = \pi + 2k\pi \end{cases},\ k;\ l\in Z.$$

Ví dụ 5: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sin x = m.\sin^3 y & (1) \\ \cos x = m.\cos^3 y & (2) \end{cases}.$$

Giải

Bình phương (1) và (2) rồi cộng lại, thu được:

$$1 = (m.\sin^3 y)^2 + (m.\cos^3 y)^2 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow 1 = m^2[(\sin^2 y + \cos^2 y)^3 - 3(\sin^2 y + \cos^2 y)\sin^2 y.\cos^2 y]$$

$$= m^2(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2y) = m^2[1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4y)] = m^2(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4y)$$

$$\overset{m\neq 0}{\Leftrightarrow} \cos 4y = \frac{8 - 5m^2}{3m^2}. \qquad (3)$$

Để hệ có nghiệm trước hết (3) phải có nghiệm, ta được:

$$\left|\frac{8 - 5m^2}{3m^2}\right| \le 1 \Leftrightarrow 1 \le |m| \le 2.$$

Với điều kiện đó (3) có nghiệm y_0 thoả mãn (*), tức là tồn tại x_0 sao cho:

$$\begin{cases} \sin x_0 = m.\sin^3 y_0 \\ \cos x_0 = m.\cos^3 y_0 \end{cases}$$

tức là (x_0, y_0) là nghiệm của hệ đã cho.

Vậy với $1 \le |m| \le 2$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{5\cos^5 y} & (1) \\ \text{tg}x = \sqrt{4-\sin^3 y} & (2) \end{cases}$$

Giải

Bình phương (1) và (2) rồi trừ theo vế, thu được:

$$1 = 5\cos^5 y - 4 + \sin^3 y \Leftrightarrow 5\cos^5 y + \sin^3 y = 5. \qquad (3)$$

Ta có nhận xét:

$$5\cos^5 y + \sin^3 y \le 5|\cos^5 y| + |\sin^3 y| = 4|\cos^5 y| + (|\cos^5 y| + |\sin^3 y|)$$
$$\le 4.1 + (|\cos^2 y| + |\sin^2 y|) = 5$$

Do đó (3) có nghiệm khi

$$\begin{cases} 5\cos^5 y + \sin^3 y = 5|\cos^5 y| + |\sin^3 y| \\ |\cos^5 y| = 1 \\ |\cos^5 y| + |\sin^3 y| = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos y = 1 \Leftrightarrow y = 2k\pi;\ k \in Z. \qquad (4)$$

Thay (4) vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{5} \\ \text{tg}x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \cos\alpha,\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + 2l\pi,\ l \in Z.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2l\pi \\ y = 2k\pi \end{cases},\ k;\ l \in Z.$$

Bài toán 3: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bằng phép đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ chuyển hệ phương trình lượng giác về hệ đại số quen thuộc.

Ví dụ 7: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 3m \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{5m}{2} \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m = \frac{1}{2}$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

iải

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sin x \\ v = \sin y \end{cases}, \text{ điều kiện } |u| \le 1, |v| \le 1. \qquad (*)$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 3m \\ u^2 + v^2 = \dfrac{5m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3m \\ (u + v)^2 - 2uv = \dfrac{5m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3m \\ uv = \dfrac{18m^2 - 5m}{4} \end{cases}$$

y ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 3mt + \frac{18m^2 - 5m}{4} = 0 \Leftrightarrow f(t) = 4t^2 - 12mt + 18m^2 - 5m = 0. \ (1)$$

Với $m = \frac{1}{2}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2l\pi \vee y = \dfrac{5\pi}{6} + 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} \end{array}\right., k, l \in Z.$$

Hệ có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm thoả mãn $-1 \le t_1 \le t_2 \le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(-1) \ge 0 \\ af(1) \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{S}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -36m^2 + 20m \ge 0 \\ 18m^2 + 7m + 4 \ge 0 \\ 18m^2 - 17m + 4 \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{3m}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le m \le \dfrac{5}{9} \\ \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1}{2} \\ m \le \dfrac{4}{9} \end{array}\right. \\ -\dfrac{2}{3} \le m \le \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le m \le \dfrac{4}{9} \\ \dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{5}{9} \end{array}\right.$$

Vậy với $m \in [0, \frac{4}{9}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{9}]$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 8: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x + \sin y = 2a \\ \mathrm{tg}x.\sin y = a^2 - 1 \end{cases}.$$

Giải

Đặt: $\begin{cases} u = \mathrm{tg}x \\ v = \sin y \end{cases}$, điều kiện $|v| \le 1$. (*)

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 2a \\ uv = a^2 - 1 \end{cases}$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

Ta có $\Delta' = a^2 - a^2 + 1 = 1$ do đó (1) luôn có 2 nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = a - 1 \\ t_2 = a + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = a - 1 \\ v = a + 1 \end{cases} \quad (\mathrm{I}) \\ \begin{cases} u = a + 1 \\ v = a - 1 \end{cases} \quad (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

Giải (I): Với điều kiện (*), ta được:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x = a + 1 \\ \sin y = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}x = a + 1 = \mathrm{tg}\alpha_1 \\ \sin y = a - 1 = \sin\beta_1 \\ |a - 1| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 + k\pi \\ \left[\begin{array}{l} y = \beta_1 + 2l\pi \\ y = \pi - \beta_1 + 2l\pi \end{array}\right. \\ 0 \le a \le 2 \end{cases}, \text{ k; l} \in \mathrm{Z}.$$

Giải (II): Với điều kiện (*), ta được:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x = a - 1 \\ \sin y = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}x = a - 1 = \mathrm{tg}\alpha_2 \\ \sin y = a + 1 = \sin\beta_2 \\ |a + 1| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha_2 + k\pi \\ \left[\begin{array}{l} y = \beta_2 + 2l\pi \\ y = \pi - \beta_2 + 2l\pi \end{array}\right. \\ -2 \le a \le 0 \end{cases}, \text{ k; l} \in \mathrm{Z}.$$

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 - \mathrm{tg}y \\ \mathrm{tg}^2 y = 1 - \sin x \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \cos y \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \ne \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, \text{ k; l} \in \mathrm{Z}.$$

Đặt: $\begin{cases} u = \sin x \\ v = \operatorname{tg} y \end{cases}$, điều kiện $|u| \le 1$. (*)

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} u^2 = 1 - v \\ v^2 = 1 - u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = u - v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - v = 0 \\ u + v = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ v = 1 - u \end{array}\right. .$$

- Với u = v, ta được:

$$\begin{cases} u = v \\ u^2 = 1 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} u = v = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sin\alpha \\ \operatorname{tg} y = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = \operatorname{tg}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \\ y = \beta + l\pi \end{cases}, k; l \in Z.$$

- Với v = 1 − u, ta được:

$$\begin{cases} v = 1 - u \\ (1 - u)^2 = 1 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u \\ \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \operatorname{tg} y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + l\pi \end{cases} \end{array}\right. , k; l \in Z.$$

í dụ 10: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9^{2\cot gx + \sin y} = 3 \\ 9^{\sin y} - 81^{\cot gx} = 2 \end{cases}.$$

iải

Biến đổi hệ về dạng :

$$\begin{cases} 9^{2\cot gx} . 9^{\sin y} = 3 \\ 9^{\sin y} - 9^{2\cot gx} = 2 \end{cases}.$$

Đặt :

$\begin{cases} u = 9^{\sin y} \\ v = -9^{2\cot gx} \end{cases}$, điều kiện $u > 0$ và $v < 0$.

Hệ có dạng:

$$u + v = 2$$

$$u.v = -3$$

khi đó u.v là nghiệm của phương trình

$$t - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right. \xleftrightarrow{u>0\ \&\ v<0} \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{\sin y} = 3 \\ -9^{2\cot gx} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{in}\, y = \dfrac{1}{2} \\ \text{ot}\, gx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \\ x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k, l \in Z$$

Bài toán 4: Giải hệ lặp 3 ẩn

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước1: Tìm tập giá trị của hàm f(t), giả sử là tập I thì x, y, z, f(x
f(y) = f(f(x)), f(z) = f(f(f(x)))∈I.

Bước2: Khẳng định rằng hàm số f(t) đơn điệu trên I, giả sử là đồng biế
trên I.

Bước3: Ta đi chứng minh f(x) = x.

Thật vậy:

Từ hệ ta có x = f(f(f(x))) và f(x) đồng biến trên I.

Khi đó:

- Nếu $f(x) > x \Leftrightarrow f(f(x)) > f(x) \Leftrightarrow f(f(f(x))) > f(f(x)) > f(x) > x$
  $\Rightarrow f(f(f(x))) > x$ mâu thuẫn với hệ.
- Nếu $f(x) < x \Leftrightarrow f(f(x)) < f(x) \Leftrightarrow f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x$
  $\Rightarrow f(f(f(x))) < x$ mâu thuẫn với hệ.

Do đó f(x) = x.

Từ đó tìm được nghiệm của hệ.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - \sin y = 0 \\ y - \sin z = 0 \\ z - \sin x = 0 \end{cases}.$$

Giải

Xét hàm số f(t) = sinx, khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}.$$

Hàm f(t) có tập giá trị là $I = [-1, 1] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Hàm f(t) đồng biến trên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ hàm f(t) đồng biến trên I.

Ta đi chứng minh $f(x) = x$.
Thật vậy: từ hệ ta có $x = f(f(f(x)))$ và f(x) đồng biến trên I.

- Nếu $f(x) > x \Leftrightarrow f(f(x)) > f(x) \Leftrightarrow f(f(f(x))) > f(f(x)) > f(x) > x$
  $\Rightarrow f(f(f(x))) > x$ mâu thuẫn với hệ.
- Nếu $f(x) < x \Leftrightarrow f(f(x)) < f(x) \Leftrightarrow f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x$
  $\Rightarrow f(f(f(x))) < x$ mâu thuẫn với hệ.

Do đó $f(x) = x \Leftrightarrow x - \sin x = 0$. (*)

Xét hàm số $g(x) = x - \sin x$:

- Miền xác định D = R.
- Đạo hàm:

$$g' = 1 - \cos x \geq 0, \forall x \in D$$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.

Từ đó:

- Với x = 0, ta có: $g(0) = 0 \Leftrightarrow$ phương trình (*) nghiệm đúng.
- Với x > 0, ta có: $g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm.
- Với x < 0, ta có: $g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm.

Kết luận:

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 0.
- Vậy nghiệm của hệ là x = y = z = 0.

Bài toán 5: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp điều kiện cần và đủ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đối với hệ này câu hỏi thường được đặt ra là " Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm duy nhất ". Khi đó ta sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để giải:

Bước 1: ***Điều kiện cần:***

- Dựa vào tính chất nghiệm của các hàm số lượng giác trong hệ ta có nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (x_1, y_1) cũng là nghiệm của hê, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 \\ y_0 = y_1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right. \text{ hoặc } x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \qquad (*)$$

- Thay vào hệ ta được giá trị của tham số. Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: ***Điều kiện đủ:***

Ví dụ 12: (Đề 108): Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m - 5 \\ y + \cos x = 2 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Giải.

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$. Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất là :

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \qquad (*)$$

Với $x_0 = 0$, ta được: $\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = m - 5 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 6.$

Điều kiện đủ: Với m = 6 ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ y + \cos x = 2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có :

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow y + \cos x \le 2.$$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y = 1 \\ \cos x = 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy với m = 6 hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 13: (ĐHNT – 94): Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2 + |\sin 2x| + a = y + 1 \\ |\text{tg}6x| + 2y^2 = 2 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Giải.

Điều kiện cần: Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì: $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Với $x_0 = 0$ ta suy ra:

$$\begin{cases} a = y + 1 \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$$

Điều kiện đủ:

- Với a = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} |\sin 2x| = y + 1 \\ |\text{tg}6x| + 2y^2 = 2 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Nhận xét rằng $x = \frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$ và $y = -1$ luôn là nghiệm của hệ (I). Vậy hệ ó vô số nghiệm. Do đó $a = 0$ không thoả mãn.

- Với $a = 2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2 + |\sin 2x| = y - 1 & (1) \\ |\text{tg}6x| = 2(1 - y^2) & (2) \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Từ (1) $\Rightarrow y \geq 1$.

Từ (2) $\Rightarrow -1 \leq y \leq 1$.

Vậy hệ (II) tương đương với:

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 + |\sin 2x| = 0 \\ |\text{tg}6x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy với $a = 2$ hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 6: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho hệ.

Bước 2: Xét một phương trình nhận được từ hệ (có thể là phương trình hệ quả), sử dụng phương pháp hàm số giải phương trình này.

Bước 3: Chuyển hệ về dạng mới để xác định nghiệm.

Ví dụ 14: (Đề 108): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x + 8y = 2\pi,\ 0 < x, y < \pi & (1) \\ \cot gx - \cot gy = x - y & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ y \neq l\pi \end{cases}$, $k; l\in Z$.

Viết lại phương trình (2) dưới dạng:

$$x - \text{cotg}x = y - \text{cotg}y. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t - \text{cotg}t$, với $t\in(0, \pi)$.

Đạo hàm:

$$f' = 1 + \frac{1}{\sin^2 t} > 0 \Rightarrow \text{hàm số luôn đồng biến trên } (0, \pi).$$

Do đó từ (3), ta được:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó hệ được chuyển về dạng;

$$\begin{cases} 5x + 8y = 2\pi \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 2\pi \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2\pi}{13}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x - \cos 2y = x - 2y & (1) \\ \operatorname{tg}x = 3\operatorname{tg}y & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k; l \in Z.$$

Viết lại phương trình (1) dưới dạng:

$$x - \cos x = 2y - \cos 2y. \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t - \cos t$, với $t \in [0, 2\pi)$.

Đạo hàm:

$f' = 1 + \sin t \geq 0 \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $[0, 2\pi)$.

Do đó từ (3), ta được:

$f(x) = f(2y) \Leftrightarrow x = 2y$.

Khi đó (2) có dạng:

$$\operatorname{tg}2y = 3\operatorname{tg}y \Leftrightarrow \frac{2\operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}^2 y} = 3\operatorname{tg}y \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}^3 y - \operatorname{tg}y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}y = 0 \\ \operatorname{tg}y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right..$$

- Với $\operatorname{tg}y = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2y \\ \operatorname{tg}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2l\pi \\ y = l\pi \end{cases}, l \in Z.$$

- Với $\operatorname{tg}y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2y \\ \operatorname{tg}y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \dfrac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2l\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + l\pi \end{cases}, l \in Z.$$

- Với $\text{tg}y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2y \\ \text{tg}y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases}, l \in Z.$$

Bài toán 7: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta đánh giá một phương trình nhận được từ hệ dựa trên các dạng:

Dạng 1: Tính chất của các hàm số lượng giác và biểu thức lượng giác.

Dạng 2: Phương trình lượng giác dạng Pitago.

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Dạng 4: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

Ví dụ 16: (Đề 23): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \text{tg}x + \cot gx = 2\sin(y + \frac{\pi}{4}) \\ \text{tg}y + \cot gy = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq k\pi \\ 2y \neq l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ y \neq \frac{l\pi}{2} \end{cases}, k; l \in Z.$$

Ta có:

$$\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

do đó hệ được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} \sin(y + \frac{\pi}{4}).\sin 2x = 1 \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}).\sin 2y = 1 \end{cases} \overset{|\sin\alpha| \leq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin(y + \frac{\pi}{4}) = \sin 2x = 1 \\ \sin(y + \frac{\pi}{4}) = \sin 2x = -1 \end{array}\right. \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}).\sin 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = \dfrac{\pi}{4} + 2l\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = -\dfrac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{array}\right. \\ \sin(x - \dfrac{\pi}{4}).\sin 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = \dfrac{\pi}{4} + 2l\pi \\ \sin k\pi.\sin 2(\dfrac{\pi}{4} + 2l\pi) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = -\dfrac{3\pi}{4} + 2l\pi \\ \sin(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi).\sin 2(-\dfrac{3\pi}{4} + 2l\pi) = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ \& \ y = -\dfrac{3\pi}{4} + 2l\pi \\ k = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \\ y = -\dfrac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{cases}, \ n;\ l \in Z.$$

Vậy hệ có một họ cặp nghiệm.

Ví dụ 17: (ĐHXD 95): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{\sin(x+y)\pi} = 1 & (1) \\ 2(x^2 + y^2) = 1 & (2) \end{cases}.$$

Giải

Từ (2) ta có điều kiện : $|x| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $|y| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải (1) ta được:

$$\sin(x + y)\pi = 0 \Leftrightarrow (x + y)\pi = k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow x + y = k;\ k \in Z \qquad (3)$$

Giải (2) ta được:

$$1 = 2(x^2 + y^2) \ge (x + y)^2 = k^2 \Rightarrow |k| \le 1 \xleftrightarrow{(3)} k = 0.$$

Vậy hệ được biến đổi thành :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2(x^2 + y^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2(x^2 + x^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \ \& \ y = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \ \& \ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$ và $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$.

Bài toán 8: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp biến đổi hỗn hợp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho hệ.

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác tương ứng, biến đổi hệ hoặc một phương trình trong hệ từ đó thu được một phương trình hệ quả Giải phương trình hệ quả bằng những phương pháp:

- Tổng bình phương.
- Hàm số
- Đánh giá...

Bước 3: Thay kết quả ở bước 2 vào hệ ta sẽ nhận được nghiệm.

í dụ 18: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(\sin x + \sin y) = 1 \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

iải

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}.\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2}.\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi, k \in Z. \qquad (1)$$

Vậy hệ tương đương với:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \sin x + \sin(\dfrac{\pi}{3} - x + 2k\pi) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \sin x + \sin(\dfrac{\pi}{3} - x) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ 2\sin\dfrac{\pi}{6}.\cos(\dfrac{\pi}{6} + x) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \cos(\dfrac{\pi}{6} + x) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \dfrac{\pi}{6} + x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2l\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ x = 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{3} + 2(k-l)\pi \\ x = 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{2\pi}{3} + 2(k-l)\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \end{array}\right., k; l \in Z.$$

Ví dụ 19: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y = -1 & (1) \\ \sqrt{3}\cos 2x + \cos 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in Z.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\sin x.\cos y - \sin y.\cos x + \sin x.\sin y = -\cos x.\cos y$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos y - \sin y.\cos x = -(\cos x.\cos y + \sin x.\sin y)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - y) = -\cos(x - y) \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x - y) = -1 \Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + y + k\pi, k \in Z. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2y + 2k\pi\right) + \cos 2y = -1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin 2y + \cos 2y = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2y - \frac{1}{2}\cos 2y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2y - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + 2l\pi \\ 2y - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{6} + l\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{12} + (k + l)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + (k + l)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \end{array}\right., k, l \in Z.$$

Chú ý: Rất nhiều tài liệu biến đổi (1) như sau:

$$\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = -1 - \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y} = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x - y) = -1$$

$$\Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

nhưng để có được biến đổi như vậy nhất thiết phải xét hai trường hợp:

$$1 + \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y = 0 \text{ và } 1 + \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y \neq 0.$$

CÁC BÀI TOÁN THI

ài 1: (Đề 33): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sqrt{2}\\ \cos x+\cos y=\sqrt{2}\end{cases}.$$

BÀI GIẢI

Bằng cách cộng theo vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$(\sin x+\cos x)+(\sin y+\cos y)=2\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(y+\frac{\pi}{4})=2$$

$$\overset{\sin\alpha\le 1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})=1\\ \sin(y+\dfrac{\pi}{4})=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ y+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2l\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{4}+2l\pi\end{cases},\ k,l\in Z.$$

Thử lại nghiệm trên vào hệ ta thấy luôn đúng.
Vậy hệ có một họ cặp nghiệm.

ài 2: (ĐHSP Vinh – 99): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\dfrac{3}{2}\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

BÀI GIẢI

Đặt:

$$\begin{cases}u=\sin x\\ v=\sin y\end{cases},\text{ điều kiện } |u|\le 1,\ |v|\le 1.$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases}u+v=\dfrac{3}{2}\\ u^2+v^2=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=\dfrac{3}{2}\\ (u+v)^2-2uv=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=\dfrac{3}{2}\\ uv=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

đó u, v là nghiệm của phương trình:

$$-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=1\\ \sin y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin y=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\vee y=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}\end{array}\right.,\ k\in Z.$$

Vậy hệ có bốn cặp họ nghiệm.

Bài 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}\cos x = a.\cos^3 y\\ \sin x = a.\sin^3 y\end{cases}. \qquad (I)$$

a. Giải hệ với $a = \frac{1}{2}$.

b. (Đề 126): Tìm a để hệ có nghiệm.

BÀI GIẢI

Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{cases}\cos^2 x = a^2.\cos^6 y\\ \sin^2 x = a^2.\sin^6 y\end{cases} \Rightarrow \sin^2x + \cos^2x = a^2(\sin^6y + \cos^6y)$$

$$\Leftrightarrow 1 = a^2[(\sin^2y + \cos^2y)^3 - 3(\sin^2y + \cos^2y)\sin^2y.\cos^2y]$$

$$\Leftrightarrow 1 = a^2(1 - \frac{3}{4}\sin^22y) \Leftrightarrow 3a^2.\sin^22y = 4(a^2 - 1). \qquad (1)$$

a. Với $a = \frac{1}{2}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin^22y = -3 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy với $a = \frac{1}{2}$, hệ vô nghiệm.

b. Để hệ có nghiệm trước hết (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a \neq 0\\ \left|\frac{4(a^2-1)}{3a^2}\right| \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq |a| \leq 2.$$

Với $1 \leq |a| \leq 2$, giả sử (1) có nghiệm y_0, tức là:

$$3a^2.\sin^22y_0 = 4(a^2 - 1) \Leftrightarrow a^2(\sin^6y_0 + \cos^6y_0) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a.\sin^3y_0)^2 + (a.\cos^3y_0)^2 = 1$$

tức là hệ (I) luôn có nghiệm x_0.

Vậy với $1 \leq |a| \leq 2$ hệ đã cho có nghiệm.

Bài 4: (Đề 103): Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}ax^2 + a - 1 = y - |\sin x|\\ tg^2x + y^2 = 1\end{cases}. \qquad (I)$$

BÀI GIẢI

Điều kiện cần:

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$. K đó để hệ có nghiệm duy nhất là:

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \qquad (*)$$

Với $x_0 = 0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = y_0 \\ y_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right..$$

Điều kiện đủ

. Với a = 0 hệ có dạng:

$$\begin{cases} -1 = y - |\sin x| \\ tg^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

hệ có vô số nghiệm dạng:

$$\begin{cases} x = k\pi \\ y = -1 \end{cases}, k \in Z.$$

Vậy a = 0 không thoả mãn.

b. Với a = 2 hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x| & (1) \\ tg^2 x + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $y \geq 1$ & từ (2) ta có $-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow y = 1$.

Vậy hệ có dạng : $\begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 = -|\sin x| \\ tg^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

là nghiệm duy nhất của hệ.

Vậy với a = 2 hệ có nghiệm duy nhất.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x.\cos y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x.\sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sin x.\sin y = -\dfrac{1}{4} \\ \cos x.\cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Bài tập 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x + \sin y = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Bài tập 3: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 3\sin x + 2\sin y = 0 \\ 3\cos x + 2\cos y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sin y = 5\sin x \\ 3\cos x + \cos y = 2 \end{cases}$.

Bài tập 4: Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} + a \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} - a \end{cases}$.

b. $\begin{cases} tgx + tgy = 1 \\ tg\dfrac{x}{2} + tg\dfrac{y}{2} = 2 \end{cases}$.

Bài tập 5: Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} 3(\sin x - \sin y) = 4(\sin 2x - \sin 2y) \\ 3(\cos x - \cos y) = 4(\cos 2x - \cos 2y) \end{cases}$.

b. $\begin{cases} tgx + \sin 2y = \sin 2x \\ 2\sin y.\cos(x - y) = \sin x \end{cases}$.

Bài tập 6: Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} \cos 2y + \dfrac{1}{2} = (\cos y - \dfrac{1}{2})(1 + 2\sin 2x) \\ \sin y(tgx + \cot gy) = 2\cot gy \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sin^2 x - 2\sin x.\cos 2y = \cos\dfrac{x+y}{2} + \cos\dfrac{x-y}{2} + 2 \\ \cos^2 2y + \dfrac{1}{2}(\cos x + \cos y) - 1 = 0 \end{cases}$.

Bài tập 7: Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} \sin \pi x.\cos \pi y = \dfrac{1}{4} \\ 3tg\pi x = tg\pi y \end{cases}, 0 < x + y < 2.$

b. $\begin{cases} \sin \pi x.\sin \pi y = \dfrac{3}{4} \\ tg\pi x.tg\pi y = 3 \end{cases}.$

Bài tập 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x.\cos y = m + 1 \\ \sin x.\sin y = 4m^2 + 2m \end{cases}.$$

a. Giải hệ trên khi $m = -\dfrac{1}{4}$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm.

Bài tập 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x.\cos y = b \end{cases}.$$

a. Giải hệ khi $a = 1, b = \dfrac{3}{4}$.

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

Bài tập 10: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = a \\ \operatorname{tg}(x + y) = b \end{cases}.$$

a. Giải hệ khi $a = \sqrt{3} + 1, b = -(2 + \sqrt{3})$

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

Bài tập 11: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ trên khi $m = \frac{3}{2}$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm.

Bài tập 12: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos x + m\cos y = 1 \\ \sin x + m\sin y = 1 \end{cases}.$$

Bài tập 13: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y = m \end{cases}.$$

Bài tập 14: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2y = 1 \\ \cos x = m(\sin y + \cos y) \end{cases}.$$

Bài tập 15: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos x = m\cos^3 y \\ \sin x = m\sin^3 y \end{cases}.$$

Bài tập 16: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin^2 x + m\operatorname{tg}y = m \\ \operatorname{tg}^2 y + m\sin x = m \end{cases}.$$

Bài tập 17: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = m \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases}.$$

Bài tập 18: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + y = m \\ 4(\sin^2 x + \sin^2 y) = 3 - 4\cos^2(x + y) \end{cases}.$$

Bài tập 19: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} m\cos 2y = \sin x + \cos x \\ (m+1)\sin 2y = \sin x - \cos x \end{cases}.$$

Bài tập 20: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = m \\ \mathrm{tg}x = 2\mathrm{tg}y \end{cases}.$$

Bài tập 21: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin^3 x.\cos x = m\mathrm{tg}y \\ \cos^3 x.\sin x = m\cot gy \end{cases}.$$

Bài tập 22: Xác định m để hệ sau có nghiệm và tìm nghiệm đó:

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x = m \\ \cos x + \cos 2x = m \end{cases}.$$

Bài tập 23: Xác định m để hệ sau có nghiệm (x,y) mà $x \pm y \neq k\pi$

$$\begin{cases} \cos^2 x = m\sin y \\ \cos^2 y = m\sin x \end{cases}.$$

Bài tập 24: Xác định m để hệ sau có nghiệm (x,y) thoả mãn $x \in (0;\frac{\pi}{2})$ và $y \in (0;\pi)$:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = m - 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = 2m^2 - 2 \end{cases}.$$

Bài tập 25: Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} a(|x|+1) = y + \cos x \\ |\sin x| + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Bài tập 26: Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2 + a = y + |\cos x| \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Bài tập 27: Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất thoả mãn $0 < x \leq 2\pi$, $0 < y \leq \pi$:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \sin x = a \\ \dfrac{y}{x} + \sin y = a \end{cases}.$$

Bài tập 28: Giải và biện luận các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \cos x = \cos^2 y \\ \sin x = a\sin y \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2\sin\alpha \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 2\sin^2\alpha \end{cases}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G.KORN-T.KORN. Sổ tay Toán học (Phan Văn Hạp và Nguyễn Trọng Bá dịch). Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp giáo dục - 1977.
2. Trần Thành Minh (Chủ biên). Giải toán Lượng giác . Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.
3. Trần Văn Hạo (Chủ biên). Lượng giác . Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.
4. Nguyễn Đức Đồng (Chủ biên). Tuyển tập 599 bài toán lượng giác chọn lọc . Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội - 2006.
5. Phan Huy Khải. Tuyển tập các bài toán lượng giác - Tập 1 . Nhà xuất bản Giáo dục - 1996.
6. Lê Hồng Đức. Phương pháp giải Toán Mũ & Lôgarit. Nhà xuất bản Hà Nội - 2003
7. Lê Hồng Đức. Phương pháp giải Toán Tích phân. Nhà xuất bản Hà Nội - 2003
8. Tạp chí Toán học tuổi trẻ - Nhà xuất bản Giáo dục.

MỤC LỤC

CHƯƠNG I
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Chủ đề 1. Phương trình lượng giác cơ bản..
Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình sinx=m..
Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình cosx=m...
Bài toán 3: Giải và biện luận phương trình tanx=m ....
Bài toán 4: Giải và biện luận phương trình cotx=m ....
Bài toán 5: Giải và biện luận số nghiệm thuộc (α, β) của
phương trình lượng giác cơ bản 1

Chủ đề 2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác 1
Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình $a.\sin^2x + b.\sin x + c = 0$ 1
Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình $a.\tan^2x + b.\tan x + c=0$ 1

Chủ đề 3. Phương trình bậc cao đối với một hàm số lượng giác 2
Chủ đề 4. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx...3
Chủ đề 5. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx 4
Chủ đề 6. Phương trình thuần nhất bậc ba đối với sinx và cosx 5

Chủ đề 7. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx..6
Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình
$a(\sin x + \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0$ 6
Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình
$a(\sin x - \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0$ 6

Chủ đề 8. Phương trình đối xứng đối với tanx và cotx 7
Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình
$a(\tan^2x+\cot^2x)+b(\tan x+\cot x)+c=0$ 7
Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình
$a(\tan^2x+\cot^2x)+b(\tan x-\cot x)+c=0$ 8

Chủ đề 9. Loại nghiệm không thích hợp 8

Chủ đề 10. Phương trình lượng giác hỗn hợp
chứa các biểu thức đối xứng với $\sin^{2n}x$ và $\cos^{2n}x$..................................9

Chủ đề 11. Phương trình lượng giác hỗn hợp
chứa các biểu thức đối xứng với $\tan^{2n}x$ và $\cot^{2n}x$................................. 10

Chủ đề 12. Các phương pháp giải phương trình lượng giác.................................11
Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp
đặt ẩn phụ 11
Bài toán 2: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đổi biến 12

Bài toán 3: Giải phương trình lượng giác sử dụng công thức hạ bậc 126
Bài toán 4: Biến đổi phương trình lượng giác thành phương trình tích 132
Bài toán 5: Biến đổi phương trình lượng giác thành tổng các số hạng không âm 147
Bài toán 6: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá 149

hủ đề 13. Phương trình hệ quả và hai phương trình tương đương 158
Bài toán 1: Xác định tham số để phương trình này là hệ quả của phương trình kia 158
Bài toán 2: Xác định tham số để hai phương trình tương đương 160

CHƯƠNG II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

hủ đề 1. Các phương pháp giải hệ phương trình lượng giác cơ bản 164
Bài toán 1: Giải và biện luận hệ tổng 164
Bài toán 2: Giải và biện luận hệ tích 167
Bài toán 3: Giải và biện luận hệ thương 169

hủ đề 2. Các phương pháp giải hệ phương trình lượng giác không mẫu mực 174
Bài toán 1: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp cộng 174
Bài toán 2: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phép khử sau khi bình phương 176
Bài toán 3: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ 178
Bài toán 4: Hệ lặp ba ẩn 182
Bài toán 5: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp điều kiện cần và đủ.................... 183
Bài toán 6: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp hàm số 185
Bài toán 7: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá 187
Bài toán 8: Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp biến đổi hỗn hợp 189

ÀI LIỆU THAM KHẢO 197

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312 - (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: TRẦN LÊ MINH
Sửa bài: VŨ NAM
Trình bày bìa: NGỌC ANH

GIẢI TOÁN LƯỢNG GIÁC NÂNG CAO 11

Mã số: 1L - 93ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 273 - 2007/CXB/19 – 48/ĐHQGHN, ngày 11/4/2007.
Quyết định xuất bản số: 184LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2007.